DesignMat
Lineære ligningssystemer og Gauss-elimination

Preben Alsholm

Uge 3 Forår 2010

1 Lineære ligningssystemer og Gauss-elimination

1.1 Om talrummet $\mathbb{R}^n$

Om talsæt bestående af n tal

- $\mathbb{R}^n$ er blot mængden af talsæt, hver bestående af n tal:

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,|a_i \in \mathbb{R}\}$$

- Addition defineres ved $(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$
- Multiplikation med et tal $k \in \mathbb{R}$

$$k\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\,k = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n)$$

- Jens Eisings bog bruger betegnelsen $\underline{a}$ for $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Altså $\underline{a}= (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
- Her vil vi blot skrive $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
- Talsættet $(0, 0, \ldots, 0)$ kaldes nulelementet og betegnes af JE med $\underline{0}$, men vil her blot blive betegnet med 0.
- Det må så af sammenhængen fremgå, om der er tale om tallet 0 eller talsættet $(0, 0, \ldots, 0)$.

1.2 Eksempel 1

Eksempel 1

100g mælk	Komælk	Fåremælk	Gedemælk
Protein	3.2g	6.2g	3.8g
Kulhydrat	4.9g	5.0g	4.4g
Fedt	3.5g	8.9g	4.1g

- Kan man opnå en blanding, der pr. 100g indeholder 4g protein, 4.5g kulhydrat og 5g fedt?
  Brøkdele: Komælk x, Fåremælk y, Gedemælk z, Postevand w.

- Proteinmængden: $3.2 \cdot x + 6.2 \cdot y + 3.8 \cdot z = 4$
- Kulhydratmængden: $4.9 \cdot x + 5.0 \cdot y + 4.4 \cdot z = 4.5$
- Fedtmængden: $3.5 \cdot x + 8.9 \cdot y + 4.1 \cdot z = 5$
- Summen skal være 1: $x + y + z + w = 1$

1.3 Eksempel 1 (alternativ formulering)

Eksempel 1 (alternativ formulering)

Brøkdele	Komælk	Fåremælk	Gedemælk	Postevand
Protein	0.032	0.062	0.038	0
Kulhydrat	0.049	0.050	0.044	0
Fedt	0.035	0.089	0.041	0
Vand	0.884	0.799	0.877	1

- Kan man opnå en blanding, der indeholder 4% protein, 4.5% kulhydrat, 5% fedt og 86.5% vand?
  Brøkdele: Komælk x, Fåremælk y, Gedemælk z, Postevand w.
- Proteinmængden: $0.032 \cdot x + 0.062 \cdot y + 0.038 \cdot z = 0.04$
- Kulhydratmængden: $0.049 \cdot x + 0.050 \cdot y + 0.044 \cdot z = 0.045$
- Fedtmængden: $0.035 \cdot x + 0.089 \cdot y + 0.041 \cdot z = 0.05$
- Vandmængden: $0.884 \cdot x + 0.799 \cdot y + 0.877 \cdot z + 1 \cdot w = 0.865$

1.4 Et generelt lineært ligningssystem

Et generelt lineært ligningssystem

- Et lineært ligningssystem:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- Koefficienterne er tallene $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$. De ubekendte er $x_1, x_2, \ldots, x_n$. På højresiden befinder sig tallene $b_1, b_2 \ldots, b_m$.
- En løsning er et sæt af n tal, der indsat i stedet for $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i ligningerne gør disse til sande udsagn af typen $5 = 5, 7 = 7, -311 = -311$ eller $0 = 0$.

1.5 Struktursætningen

Struktursætningen

- Et lineært ligningssystem kaldes *homogent*, hvis høresiderne består af nuller.
- Et homogent ligningssystem har altid mindst én løsning, nemlig nulløsningen: Den *trivielle* løsning $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0) = 0$.
- Hvis $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ og $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ er løsninger til et homogent system, så er også $x + y$ og kx (med $k \in \mathbb{R}$) løsninger.

  Theorem 1. *Lad $\tilde{x}$ være en løsning til det inhomogene ligningssystem. Lad L_{hom} og L_{inhom} betegne løsningsmængderne for det homogene og det inhomogene system, henholdsvis. Så gælder, at $L_{inhom} = \tilde{x} + L_{hom}$.*

- Hermed gælder: Hvis $L_{\text{hom}} = \{0\}$, så er $L_{\text{inhom}} = \{\tilde{x}\}$. Det inhomogene system har kun løsningen $\tilde{x}$.

1.6 Koefficientmatrix, Totalmatrix

Koefficientmatrix, Totalmatrix

- Koefficientmatricen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Totalmatricen (på engelsk: *the augmented matrix*)

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

- A er en $m \times n$-matrix, fordi A har m rækker og n søjler.
  T er en $m \times (n+1)$-matrix, fordi T har m rækker og $n+1$ søjler.

- Maple: Et tilfældigt valgt lineært ligningssystem.

1.7 Tilladelige operationer

Tilladelige operationer

- Tilladte operationer på ligningerne:

  1. Ombytning to ligninger.

2. Multiplikation af en ligning med et tal forskellig fra nul.
3. Erstatning af ligning nr. i med summen af ligning i og et tal gange ligning j, når $i \neq j$.

- Tilladte operationer på rækkerne i totalmatricen:

1. $R_i \leftrightarrow R_j$
2. $R_i := cR_i$ hvor $c \neq 0$
3. $R_i := R_i + cR_j$ hvor $i \neq j$

- Maple: Illustration af de tilladte operationer.

1.8 En tilladelig operation mere (men undgå den!)

En tilladelig operation mere (men undgå den!)

- Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 &= 4 \\ -3x_1 \qquad + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

- Det har naturligvis de samme løsninger som systemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + 3x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 5x_3 + 7x_2 &= 4 \\ -3x_1 + x_3 \qquad &= 5 \end{aligned}$$

- De tilsvarende totalmatricer har søjle 2 og 3 ombyttet: $S_2 \leftrightarrow S_3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 7 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- Søjleombytninger foretages i bogen, men vi vil undgå dem.

1.9 Eksempel 2. Gausselimination I

Eksempel 2. Gausselimination I

- Systemet fra før

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 &= 4 \\ -3x_1 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

- har totalmatricen

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

- Vi vil ved rækkeoperationer bringe matricen på echelonform:

$$\begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & \# & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & \# \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.10 Eksempel 2. Gausselimination II

Eksempel 2. Gausselimination II

- Rækkeoperationen $R_2 := R_2 - 2R_1$ giver $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$
- Rækkeoperationen $R_3 := R_3 + 3R_1$ giver $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 9 & 7 & 14 \end{bmatrix}$
- Rækkeoperationen $R_3 := R_3 - 9R_2$ giver nu matricen på echelonform: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 32 \end{bmatrix}$
- Rækkeoperationen $R_3 := -\frac{1}{2}R_3$ giver en pænere version: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -16 \end{bmatrix}$

1.11 Eksempel 2. Gausselimination III

Eksempel 2. Gausselimination III

- Det tilsvarende ligningssystem er

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_2 + x_3 &= -2 \\ x_3 &= -16 \end{aligned}$$

- Dette kan løses nedefra og op:
  1. Først findes $x_3 = -16$
  2. Derefter $x_2 = -x_3 - 2 = 16 - 2 = 14$
  3. Til sidst $x_1 = -3x_2 - 2x_3 + 3 = -42 + 32 + 3 = -7$
- Løsningen er altså $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 14 \\ -16 \end{bmatrix}$

1.12 Eksempel 2. Gausselimination IV

Eksempel på Gausselimination IV

- Totalmatricen på echelonform var $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -16 \end{bmatrix}$
- Man kunne gå videre til reduceret echelonform: Rækkeoperationerne $R_2 := R_2 - R_3$ og $R_1 := R_1 - 2R_3$ giver $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -16 \end{bmatrix}$
- Rækkeoperationen $R_1 := R_1 - 3R_2$ giver $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -16 \end{bmatrix}$
- Det tilsvarende ligningssystem er nu ekstremt simpelt:

$$\begin{aligned} x_1 &= -7 \\ x_2 &= 14 \\ x_3 &= -16 \end{aligned}$$

1.13 De 3 tilfælde

De 3 tilfælde

- I eksempel 2 var der præcis én løsning. Der er to andre muligheder. Eks. 3 og 4 i Maple.
- De 3 tilfælde kan illustreres ved følgende til echelonform reducerede totalmatricer:

$$\begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & \# & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & \# \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Den første svarer til Eks. 2: Præcis én løsning. 3 *pivoteringssøjler* i koefficientmatricen.
- Den anden svarer til Eks. 3 (Maple): Ingen løsning. Her er 2 *pivoteringssøjler* i koefficientmatricen.
- Den tredie svarer til Eks. 4 (Maple): Uendeligt mange løsninger. *Pivoteringssøjler* er søjle 1 og 3. Så x_1 og x_3 kan udtrykkes ved den *frie variable* x_2.

1.14 Rang af matrix

Rang af matrix

- Definition. Rangen af en matrix er antallet af pivoteringssøjler.

- Således er rangen af matricerne T_1, T_2, T_3

$$\begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & \# & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & \# \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- givet ved $\rho(T_1) = 3,\ \rho(T_2) = 3,\ \rho(T_3) = 2.$
- Rangen af matricerne A_1, A_2, A_3

$$\begin{bmatrix} \# & * & * \\ 0 & \# & * \\ 0 & 0 & \# \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * \\ 0 & 0 & \# \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * \\ 0 & 0 & \# \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- er $\rho(A_1) = 3,\ \rho(A_2) = 2,\ \rho(A_3) = 2.$

1.15 Antal og art af løsninger

Antal og art af løsninger

- Lad ligningssystemet bestå af m ligninger med n ubekendte. Koefficientmatrix A, totalmatrix $T = [A|b]$.
- Hvis $\rho(T) > \rho(A)$, så har systemet ingen løsninger.
- Hvis $\rho(T) = \rho(A) = n$, så har systemet præcis én løsning.
- Hvis $\rho(T) = \rho(A) = \rho < n$, så har systemet uendeligt mange løsninger. Der er $n - \rho$ frie variable.
- Hvis x_p er en partikulær løsning til det inhomogene system, så findes der $n - \rho$ talsæt $v_1, v_2, \ldots, v_{n-\rho} \in \mathbb{R}^n$ så løsningerne kan skrives på formen

  $$x = x_p + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \ldots + t_{n-\rho} v_{n-\rho}$$

  hvor $t_1, t_2, \ldots, t_{n-\rho} \in \mathbb{R}$.
- $x = t_1 v_1 + t_2 v_2 + \ldots + t_{n-\rho} v_{n-\rho},\ t_1, t_2, \ldots, t_{n-\rho} \in \mathbb{R}$, er den fuldstændige løsning til det homogene system.

1.16 Fuld rang. Kvadratisk ligningssystem

Fuld rang. Kvadratisk ligningssystem

- En matrix $m \times n$ matrix A siges at have *fuld rang*, hvis rangen er så stor, som den kan blive, nemlig $\rho(A) = \min(m, n)$.
- Ligningssystemet kaldes *kvadratisk*, hvis antal ligninger = antal ubekendte = n.
- Koefficientmatricen A er da en $n \times n$ matrix, og kaldes også kvadratisk.
- En $n \times n$ matrix A kaldes *regulær*, hvis $\rho(A) = n$.
- Et kvadratisk ligningssystem har netop én løsning, hvis og kun hvis A er regulær.