DesignMat
Lineære ligningssystemer og matricer

Preben Alsholm

Uge 4 Forår 2010

1 Matrixalgebra

1.1 Addition og multiplikation med skalar

Addition og multiplikation med skalar

- Addition af matricer. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

- Multiplikation med skalar. Med A som før:

$$sA = \begin{bmatrix} sa_{11} & sa_{12} & sa_{13} \\ sa_{21} & sa_{22} & sa_{23} \end{bmatrix}$$

- Den kommutative regel for addition: $A + B = B + A$
- Den associative regel for addition: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Regler for multiplikation med skalar: $r(A + B) = rA + rB, \quad (r + s) A = rA + sA, \quad (rs) A = r(sA)$
- Maple.

1.2 Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation I

- Lad A være en $m \times n$-matrix og lad $x \in \mathbb{R}^n$. Skriv $A = [a_1\, a_2\, \ldots\, a_n]$, hvor nu $a_i \in \mathbb{R}^m$. Så definerer vi produktet Ax ved

$$Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n$$

- Ligningssystemet med koefficientmatricen A og højresiden b kan nu skrives

$$Ax = b$$

- Alternativ udregning af Ax: Skalarprodukterne af rækkerne i A med søjlen x.
- Multiplikation af matricer: A er $m \times n$ og B er $n \times p$.

$$AB = A \begin{bmatrix} b_1 \; b_2 \; \ldots \; b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1 \; Ab_2 \; \ldots \; Ab_p \end{bmatrix}$$

- Ækvivalent definition (der bruges i JE):

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{21} + \ldots + a_{in}b_{n1}$$

- Maple-illustration.

1.3 Matrixmultiplikation II

Matrixmultiplikation II

- Den associative regel for multiplikation: $(AB)\,C = A\,(BC)$
- De distributive regler: $A\,(B + C) = AB + AC, \qquad (B + C)\,A = BA + CA$
- Regning med skalar: $r\,(AB) = (rA)\,B = A\,(rB)$
- AB og BA. Hvornår eksisterer begge?
- Hvornår giver spørgsmålet $AB = BA$ mening?
- Er det i så fald tilfældet?
- Matricer kommuterer ikke generelt! Man skal altså regne med, at $AB \neq BA$. Se Maple for eksempler.

1.4 Enhedsmatricen

Enhedsmatricen

- Enhedsmatricen af størrelse $n \times n$ betegnes med I_n:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

- Hvis A er $m \times n$, så gælder $I_mA = AI_n = A$.
- Maple.

1.5 Transponering

Transponering

- Den transponerede af matricen $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ er matricen

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- $\left(A^T\right)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$ Bemærk rækkefølgen!
- $(rA)^T = rA^T$

1.6 Ækvivalens af matricer og rang

Ækvivalens af matricer og rang

- *Definition*. Matricerne A og B siges at være ækvivalente ($A \sim B$), hvis den ene ved rækkeoperationer kan omdannes til den anden.
- Hvis $A \sim B$ så gælder åbenbart, at $\rho(A) = \rho(B)$.
- Det omvendte er galt: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ har samme rang, men de er ikke ækvivalente!
- Det kan vises, at $\rho\left(A^T\right) = \rho(A)$. (Det er ikke trivielt).
- Note: Kan vises ved at vise, at $N\left(A^T\right)^\perp = R(A)$. Dette betyder, at søjlerummet er mængden af de vektorer, der står vinkelret på nulrummet for A^T.

1.7 Matrixligninger

Matrixligninger

- Lad A være en $m \times n$ matrix og B en $m \times p$ matrix. Vi vil løse ligningen $AX = B$.
- Her bliver den ubekendte matrix X nødvendigvis en $n \times p$ matrix.
- Skriv $X = \left[x_1\ x_2\ \dots\ x_p\right]$ og $B = \left[b_1\ b_2\ \dots\ b_p\right]$
- Så har vi $\left[Ax_1\ Ax_2\ \dots\ Ax_n\right] = \left[b_1\ b_2\ \dots\ b_p\right]$.

- Vi skal altså løse systemerne $Ax_1 = b_1, Ax_2 = b_2, \ldots, Ax_p = b_p$.
- De p systemer har samme koefficientmatrix, men p forskellige højresider, der stillet sammen udgør B.
- Totalmatricen indeholdende alle højresiderne er dermed $T = [A \mid B]$.
- $AX = B$ har ingen løsning, når $\rho(T) > \rho(A)$.
- $AX = B$ har netop én løsning, når $\rho(T) = \rho(A) = n$.
- $AX = B$ har uendeligt mange løsninger, når $\rho(T) = \rho(A) = \rho < n$. I alt er der $(n - \rho)\, p$ frie parametre.
- Maple.