DesignMat
Kvadratiske matricer, invers matrix, determinant

Preben Alsholm

Uge 5 Forår 2010

1 Kvadratiske matricer, invers matrix, determinant

1.1 Invers matrix I

Invers matrix I

- *Definition.* En $n \times n$-matrix A siges at være invertibel, hvis der findes en $n \times n$-matrix C, så
$$AC = CA = I$$
I bekræftende fald kaldes C en invers til A.
- Hvis kun $AC = I$, siger man, at A har en højreinvers C.
- Hvis kun $CA = I$, siger man, at A har en venstreinvers C.
- Hvis A har en invers, er den entydigt bestemt: Antag, at $AC_1 = I$ og $C_2A = I$. Så gælder
$$C_2 = C_2I = C_2(AC_1) = (C_2A)C_1 = IC_1 = C_1$$
- Den inverse af A betegnes med A^{-1}.
- Sætning. *Matricen A er invertibel hvis og kun hvis A er regulær, dvs. har fuld rang. Matricen A^{-1} er entydigt bestemt som løsningen C til $AC = I$.*
- Maple.

1.2 Invers matrix II, Algoritmen

Invers matrix II, Algoritmen

- Vi vil bestemme C, så $AC = I$.
- Totalmatricen dermed $[A \mid I]$.
- $AC = I$ har en løsning C, netop når A har fuld rang, og C findes ved Gauss-Jordan $[A \mid I] \to [I \mid C]$.

- Hermed har vi fundet en højreinvers C.
- Men så fås $A(CA - I) = ACA - A = (AC)A - A = A - A = 0$ (nulmatricen).
- Men af $A(CA - I) = 0$ fås $CA - I = 0$ da $AX = 0$ kun har nulløsningen, når A har fuld rang. Altså $CA = I$.
- Konklusion: Når A har en højreinvers, så er denne også venstreinvers, og dermed er den invers, altså A^{-1}.
- Maple.

1.3 Invers matrix II

Invers matrix II

- Hvis A er invertibel, så er A^{-1} invertibel og $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
- Hvis A og B begge er invertible, så er AB invertibel og $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Bevis:

$$\begin{aligned}
(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) &= A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I \\
\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) &= B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I
\end{aligned}$$

- Hvis A er invertibel, så er A^T invertibel og $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.
- Bevis: $A^T\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = I^T = I$
- og $\left(A^{-1}\right)^T A^T = \left(AA^{-1}\right)^T = I^T = I$.

2 Determinanter

2.1 Permutationer I

Permutationer I

- Definition. En bijektiv afbildning

$$P : \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

  kaldes en *permutation* af tallene $1, 2, 3, \ldots, n$.
- En permutation af tallene $1, 2, 3, \ldots, n$ kan opfattes som en omordning af tallene til ordenen $P(1), P(2), P(3), \ldots, P(n)$.
- Eksempelvis er $3, 5, 1, 2, 4$ en permutation af $1, 2, 3, 4, 5$. Her er funktionen P givet ved

$$P(1) = 3, P(2) = 5, P(3) = 1, P(4) = 2, P(5) = 4$$

- Den omvendte funktion P^{-1} er permutationen $3, 4, 1, 5, 2$.
- Med S_n betegner vi mængden af samtlige permutationer af tallene $1, 2, 3, \ldots, n$.
- $S_2 = \{(1,2), (2,1)\}$. $S_3 = \{(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)\}$.
- Der er $n!$ medlemmer i S_n.

2.2 Permutationer II

Permutationer II

- Lad $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n$ være en permutation af $1, 2, 3, \ldots, n$. Hvis $p < q$, men $j_p > j_q$, så kaldes talparret j_p, j_q en *inversion* indenfor permutationen.
- Permutationen $3, 5, 1, 2, 4$ indeholder inversionerne $(3,1), (3,2), (5,1), (5,2), (5,4)$. Altså 5 inversioner.
- Antallet af inversioner i en permutation betegnes $I(j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n)$. Vi har altså $I(3,5,1,2,4) = 5$.
- En permutation kaldes *lige* eller *ulige*, hvis inversionsantallet er lige eller ulige, henholdsvis.
- Fortegnet $\mathrm{sgn}(j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n)$ for en permutation defineres som 1, hvis permutationen er lige, og -1, hvis den er ulige.
- Lemma 3.1. Ved ombytning af to elementer i en permutation skifter denne fortegn.
- Eksempelvis er $\mathrm{sgn}(3,5,1,2,4) = -1$, men $\mathrm{sgn}(3,2,1,5,4) = 1$.

2.3 Definition af determinant

Definition af determinant

- Lad $n \times n$-matricen A være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Determinanten af A defineres ved en sum over alle permutationer i S_n:

$$\det A = \sum_{S_n} sgn\,(j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

- Determinanten af en 2×2-matrix A findes dermed til

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = sgn\,(1,2)\, a_{11}a_{22} + sgn\,(2,1)\, a_{12}a_{21} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

- Heldigvis det vi kender fra gymnasiet.

2.4 Determinanter: Eksempler

Determinanter: Eksempler

- Eksempel. $S_3 = \{(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)\}$.
- Med $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ fås determinanten $|A|$ til
- $sgn\,(1,2,3)\, a_{11}a_{22}a_{33} + sgn\,(1,3,2)\, a_{11}a_{23}a_{32}$
  $+sgn\,(2,1,3)\, a_{12}a_{21}a_{33} + sgn\,(2,3,1)\, a_{12}a_{23}a_{31}$
  $+sgn\,(3,1,2)\, a_{13}a_{21}a_{32} + sgn\,(3,2,1)\, a_{13}a_{22}a_{31}$
- $= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$
  $-a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}$
  $+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$
- $= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$
- Sarrus' regel.
- Maple-illustrationer af definitionen.

2.5 Determinant af triangulær matrix

Determinant af triangulær matrix

- Hvis $n \times n$-matricen A opfylder $a_{ij} = 0$ for $i > j$ dvs. har den specielle form
  $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
  kaldes den *øvre triangulær*.
- Hvert led i summen $\sum_{S_n} sgn\,(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n)\, a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ indeholder et element fra hver række.
- Det eneste led, der ikke giver nul er $sgn\,(1,2,3,\dots,n)\, a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.
- Altså har vi for en øvre (eller nedre) triangulær matrix, at $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

2.6 Rækkeoperationernes virkning på determinanten

Rækkeoperationernes virkning på determinanten

- $R_i \longleftrightarrow R_j$ $(i \neq j)$ skifter fortegn på determinanten.
- $R_i := kR_i$ gør determinanten k gange større.
- $R_i := R_i + kR_j$ $(i \neq j)$ ændrer ikke determinantens værdi.

- Beregn determinanten $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & 2 \end{vmatrix}$ ved brug af Gauss-elimination:

- Operationen $R_3 := R_3 - 3R_1$ og derefter $R_3 := R_3 - 14R_2$ giver

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -14 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{vmatrix}$$

- $= 2 \cdot (-1) \cdot 17 = -34.$

- Maple-illustrationer.

2.7 Sætninger om determinanten

Sætninger om determinanten

- Sætning 3.9 A er regulær, hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.

- Bevis. Hvis B fremkommer af A ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$.

- A er regulær, hvis og kun hvis A er rækkeækvivalent med enhedsmatricen. Men $\det I = 1 \neq 0$.

- Sætning 3.10 $\det (AB) = \det (A) \det (B)$.

- Bevis. Hvis AB er invertibel, så er A også, idet $(AB)\, C = I$ jo medfører, at BC er invers til A.

- Vi kan antage, at A er invertibel. Ved Gauss-eliminationen $[A \mid I] \to \left[I \mid A^{-1}\right]$ ses, at $\det A = (-1)^r \cdot produkt\_pivot\_elementer$.

- Samme rækkeoperationer gør: $[A \mid AB] \to [I \mid B]$. Men herved fås, at $\det (AB) = \det A \cdot \det B$.

- Korollar 3.11. $\det \left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$.

- Sætning 3.12 $\det \left(A^T\right) = \det A$.

- Bevis: $\det A = \sum_{S_n} sgn\,(j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$
$= \sum_{S_n} sgn\,(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n)\, a_{i_1 1} a_{i_2 i} \cdots a_{i_n n} = \det \left(A^T\right)$.

- Maple.