

# DesignMat

## Lineære differentiallyigninger II

Preben Alsholm

Uge 10 Forår 2010

### 1 Lineære Differentiallyigninger af anden orden

#### 1.1 Bestemmelse af en partikulær løsning

##### Bestemmelse af en partikulær løsning

- Vi betragter nu den inhomogene ligning

$$ax'' + bx' + cx = q(t) \quad (\text{Inhomogen})$$

- hvor højresiden har formen

$$q(t) = t^m e^{\alpha t} \begin{cases} \cos \beta t \\ \sin \beta t \end{cases}$$

- Disse højresider er løsninger til homogene lineære differentiallyigninger med konstante koefficienter!
- Vi ønsker at bestemme en partikulær løsning til *Inhomogen*.
- Opskrift på formen af en partikulær løsning til *Inhomogen* gives i det følgende skema.

#### 1.2 Skema til ansats

##### Skema til ansats

$Q_m(t)$  er et givet polynomium af grad  $m$ .  $P_m(t)$  og  $R_m(t)$  er polynomier af grad  $m$ , hvor samtlige led forekommer (med ubestemte koefficienter).

$q(t)$	$Q_m(t)$	$Q_m(t) e^{\alpha t}$	$Q_m(t) e^{\alpha t} \cos \beta t$ (eller $\sin \beta t$ )
q-rod	0	$\alpha$	$\alpha \pm i\beta$
Ansats	$t^s P_m(t)$	$t^s P_m(t) e^{\alpha t}$	$t^s \begin{bmatrix} P_m(t) e^{\alpha t} \cos \beta t \\ + R_m(t) e^{\alpha t} \sin \beta t \end{bmatrix}$

$s$  skal vælges som det mindste hele ikke-negative tal ( $s = 0, 1, 2, 3, \dots$ ), som sikrer, at intet led i ansatsen løser den homogene ligning. ( $s$  er multipliciteten af "q-rod" i karakterpolynomiet). Hvis q-rod er rod i karakterpolynomiet, er der *resonans*.

### 1.3 Eksempel 1

#### Eksempel 1

- Vi finder en partikulær løsning til  $x'' + 3x' + 2x = 20te^{3t}$ .
- Karakterligningen har rødderne  $-2$  og  $-1$ . Der er ikke resonans, idet  $q$ -roden er  $3$  (dobbeltrød).
- Ansats:

$$x_p(t) = (At + B)e^{3t}$$

- Ansatsen indsættes i differentiaalligningen:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( (At + B)e^{3t} \right) + 3 \frac{d}{dt} \left( (At + B)e^{3t} \right) + 2(At + B)e^{3t} = 20te^{3t}$$

- Udregning og reduktion giver

$$te^{3t}(20A) + e^{3t}(9A + 20B) = 20te^{3t}$$

- Dette skal gælde for alle  $t \in \mathbb{R}$ . Vi må derfor forlange  $20A = 20$  og  $9A + 20B = 0$ . Altså  $A = 1$  og  $B = -\frac{9}{20}$ .
- En partikulær løsning er dermed  $x_p(t) = \left(t - \frac{9}{20}\right)e^{3t}$ .

### 1.4 Eksempel 2

#### Eksempel 2

- Differentiaalligningen  $x'' + 3x' + 2x = 4t^2$  har samme homogene ligning som ovenfor. Ingen resonans.
- Ansats til en partikulær løsning:

$$x_p(t) = At^2 + Bt + C$$

- Ansatsen indsættes i differentiaalligningen:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( At^2 + Bt + C \right) + 3 \frac{d}{dt} \left( At^2 + Bt + C \right) + 2 \left( At^2 + Bt + C \right) = 4t^2$$

- Udregning og reduktion giver:

$$2At^2 + (6A + 2B)t + 2A + 3B + 2C = 4t^2$$

- Dette skal gælde for alle  $t \in \mathbb{R}$ . Vi må derfor forlange  $2A = 4$ ,  $6A + 2B = 0$  og  $2A + 3B + 2C = 0$ . Altså  $A = 2$ ,  $B = -6$  og  $C = 7$ .
- En partikulær løsning er dermed  $x_p(t) = 2t^2 - 6t + 7$ .

## 1.5 Eksempel 3

### Eksempel 3

- Differentialligningen  $x'' + 3x' + 2x = 3e^{-2t}$  har igen samme homogene ligning som tidligere.
- Nu er der resonans, da højresiden  $3e^{-2t}$  løser den homogene ligning.
- Den basale ansats til en partikulær løsning  $x_p(t) = Ae^{-2t}$  må derfor modificeres til

$$x_p(t) = Ate^{-2t}$$

- Ansatsen indsættes i differentialligningen:

$$\frac{d^2}{dt^2} (Ate^{-2t}) + 3\frac{d}{dt} (Ate^{-2t}) + 2Ate^{-2t} = 3e^{-2t}$$

- Udregning og reduktion giver:

$$-Ae^{-2t} = 3e^{-2t}$$

- Vi må forlange, at  $-A = 3$  altså  $A = -3$ . En partikulær løsning er dermed  $x_p(t) = -3te^{-2t}$ .

## 1.6 Eksempel 4

### Eksempel 4

- Differentialligningen  $x'' + 3x' + 2x = 10 \cos t$  har samme homogene ligning som tidligere. Ingen resonans.
- Ansats til en partikulær løsning  $x_p(t) = A \cos t + B \sin t$ .
- Indsættelse:  $\frac{d^2}{dt^2} (A \cos t + B \sin t) + 3\frac{d}{dt} (A \cos t + B \sin t) + 2(A \cos t + B \sin t) = 10 \cos t$ .
- Udregning og reduktion giver  $(A + 3B) \cos t + (-3A + B) \sin t = 10 \cos t$ .
- Dette skal gælde for alle  $t \in \mathbb{R}$ . Vi må derfor forlange  $A + 3B = 10$  og  $-3A + B = 0$ . Altså  $A = 1, B = 3$ .
- En partikulær løsning er dermed  $x_p(t) = \cos t + 3 \sin t$ .

## 1.7 Eksempel 5 Kompleks gættemetode

### Eksempel 5 kompleks gættemetode

- Betragt igen differentialligningen  $x'' + 3x' + 2x = 10 \cos t$ .
- Da  $10 \cos t = \operatorname{Re}(10e^{it})$  betragter vi nu  $x'' + 3x' + 2x = 10e^{it}$ .
- Ansats til en partikulær løsning  $x_p(t) = Ae^{it}$ .

- Ansatsen indsættes i differentialligningen:

$$\frac{d^2}{dt^2} (Ae^{it}) + 3\frac{d}{dt} (Ae^{it}) + 2Ae^{it} = 10e^{it}$$

- Udregning og reduktion giver  $(1 + 3i) Ae^{it} = 10e^{it}$ .
- Vi må derfor forlange  $A = \frac{10}{1+3i} = 1 - 3i$ . Altså er partikulær løsning til den komplekse ligning  $x_p(t) = (1 - 3i)e^{it}$ .
- Realdelen af denne er partikulær løsning til den oprindelige ligning, så  $x_p(t) = \operatorname{Re}((1 - 3i)e^{it}) = \cos t + 3 \sin t$ .

## 1.8 Eksempel 6 Komplex gættemetode

### Eksempel 6 kompleks gættemetode

- Betragt differentialligningen  $x'' + 3x' + 2x = 2 \sin t \cdot e^{-2t}$ .
- Da  $2 \sin t \cdot e^{-2t} = \operatorname{Im}(2e^{(-2+i)t})$  betragter vi nu  $x'' + 3x' + 2x = 2e^{(-2+i)t}$ .
- Ansats til en partikulær løsning  $x_p(t) = Ae^{(-2+i)t}$ .
- Indsættelse:  $\frac{d^2}{dt^2} (Ae^{(-2+i)t}) + 3\frac{d}{dt} (Ae^{(-2+i)t}) + 2Ae^{(-2+i)t} = 2e^{(-2+i)t}$ .
- Udregning og reduktion giver  $-(1 + i) Ae^{(-2+i)t} = 2e^{(-2+i)t}$ .
- Vi må derfor forlange  $A = \frac{-2}{1+i} = -1 + i$ . Altså er partikulær løsning til den komplekse ligning  $x_p(t) = (-1 + i)e^{(-2+i)t}$ .
- Imaginærdelen af denne er partikulær løsning til den oprindelige ligning, så  $x_p(t) = \operatorname{Im}((-1 + i)e^{(-2+i)t}) = e^{-2t}(\cos t - \sin t)$ .

## 2 Lineære Differentialligninger af n'te orden

### 2.1 Eksistens- og entydighed

#### Eksistens- og entydighed

- Vi betragter lineære differentialligninger med konstante koefficienter:

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = q(t) \quad (1)$$

med  $q \in C(I)$ , hvor  $I$  er et interval.  $a_0, a_1, \dots, a_n$  er reelle konstanter og  $a_n \neq 0$ .

- Teorien for n'te ordens lineære differentialligninger er ganske som for  $n = 2$ .
- Sætning. Lad  $t_0 \in I$  og  $x_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}$ . *Begyndelsesværdiproblemet* for (1) med  $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = v_1, x''(t_0) = v_2, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = v_{n-1}$  har netop én løsning og den er defineret på hele intervallet  $I$ .

## 2.2 Eksempel 7

### Eksempel 7

- $x''' + 2x'' + x' + 2x = 12 \sin(2t)$ . Karakterligningen:  $R^3 + 2R^2 + R + 2 = 0$ . Rødder  $-2$  og  $\pm i$ .
- Fuldstændig løsning til den tilsvarende homogene ligning:  $x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 \cos t + c_3 \sin t$ .
- Da  $12 \sin(2t) = \operatorname{Im}(12e^{2it})$  betragter vi nu  $x''' + 2x'' + x' + 2x = 12e^{2it}$ .
- Ansats  $x_p(t) = Ae^{2it}$  indsættes:  $\frac{d^3}{dt^3}(Ae^{2it}) + 2\frac{d^2}{dt^2}(Ae^{2it}) + \frac{d}{dt}(Ae^{2it}) + 2Ae^{2it} = 12e^{2it}$
- Udregning og reduktion giver  $-6(1+i)Ae^{2it} = 12e^{2it}$ . Så  $A = \frac{-12}{6(1+i)} = -1+i$ .
- En partikulær løsning til den komplekse ligning:  $x_p(t) = (-1+i)e^{2it}$ .
- Partikulær løsning til den oprindelige ligning  $x_p(t) = \operatorname{Im}((-1+i)e^{2it}) = \cos(2t) - \sin(2t)$ .
- Fuldstændig løsning til den oprindelige ligning:  $x(t) = \cos(2t) - \sin(2t) + c_1 e^{-2t} + c_2 \cos t + c_3 \sin t$ .