DesignMat Uge 3
Egenværdiproblemet for lineær afbildning

Preben Alsholm

Efterår 2010

1 Egenværdiproblemet for lineær afbildning

1.1 Definition og Eksempel 1

Definition og Eksempel 1

- Lad V være et vektorrum over $\mathbb{L}$ (enten $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$).
- Lad $f : V \longrightarrow V$ være lineær. Tallet λ kaldes en *egenværdi* for f, hvis der findes en vektor $v \neq 0$, så
$$f(v) = \lambda v \tag{1}$$
- En vektor v, der opfylder (1), kaldes en *egenvektor* hørende til egenværdien λ.
- Egenrummet $E_\lambda = \{v \in V \,|\, f(v) = \lambda v\}$ er et underrum.
- Eksempel 1. Lad $V = \mathrm{P}_n(\mathbb{R})$ og lad $f : V \to V$ være givet ved $f(v)(x) = xv'(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.
- Så er polynomierne $m_0(x) = 1, m_1(x) = x, m_2(x) = x^2, \ldots, m_n(x) = x^n$ egenvektorer for f hørende til egenværdierne $0, 1, 2, \ldots, n$, henholdsvis.
- Bevis: $f(m_k)(x) = x\frac{d}{dx}\left(x^k\right) = xkx^{k-1} = kx^k = km_k(x)$, altså $f(m_k) = km_k$ for $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

1.2 Eksempel 2

Eksempel 2

- Lad V være et vektorrum med basis $a = (a_1, a_2, a_3)$.
- Lad $f : V \longrightarrow V$ være den lineære afbildning, der er givet ved $f(a_1) = 3a_1, \quad f(a_2) = -11a_2 + 36a_3, \quad f(a_3) = -3a_2 + 10a_3$.
- Åbenbart er a_1 egenvektor med 3 som tilhørende egenværdi.
- Det påstås, at $u = -a_2 + 3a_3$ også er egenvektor.

- Eftervisning:

$$\begin{aligned} f(u) &= f(-a_2+3a_3) = -f(a_2)+3f(a_3) \\ &= -(-11a_2+36a_3)+3(-3a_2+10a_3) \\ &= 2a_2-6a_3 = -2u \end{aligned}$$

- På samme vises, at $v = -a_2 + 4a_3$ er egenvektor hørende til egenværdien 1.

1.3 Eksempel 2 fortsat

Eksempel 2 fortsat

- Afbildningsmatricen F for f mht. basen a er

$$F = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -3 \\ 0 & 36 & 10 \end{bmatrix}$$

- Da $K_a(f(x)) = FK_a(x)$ følger det af $f(a_1) = 3a_1, f(u) = -2u$ og $f(v) = v$ at

$$F\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, F\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, F\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- Afbildningsmatricen F har de samme egenværdier som den lineære afbildning f.

- Koordinatvektorerne for egenvektorerne for f er egenvektorer for F.

1.4 Matrixegenværdiproblemet

Matrixegenværdiproblemet

- Lad $f : V \to V$ være lineær og V endelig-dimensional, $\dim V = n$.

- Lad $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ være en basis for V.

- Lad F være afbildningsmatricen ${}_vF_v$.

- Så gælder $f(x) = \lambda x \Longleftrightarrow FK_v(x) = \lambda K_v(x)$.

- f og F har altså samme egenværdier.

- $x \in V$ er egenvektor for f hørende til egenværdien λ, hvis og kun hvis koordinatvektoren $K_v(x)$ er egenvektor for F hørende til egenværdien λ.

- Alle afbildningsmatricer for f har samme karakterpolynomium.

- Vi kan derfor tale om karakterpolynomiet for f uden at nævne en basis for V.

1.5 Sætning 7.3 og 7.4 Lineær uafhængighed af egenvektorer

Sætning 7.3 og 7.4 Lineær uafhængighed af egenvektorer

- Sætning 7.3. Hvis $v_1, v_2, \ldots, v_r$ er egenvektorer hørende til indbyrdes forskellige egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, så er $v_1, v_2, \ldots, v_r$ lineært uafhængige.
- Bevis: Følger af, at samme resultat for matricer.
- Sætning 7.4. Lad f have de indbyrdes forskellige egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ med egenrum $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_r}$, der har dimensionerne $q_1, q_2, \ldots, q_r$.
- Vælges baser for hver af disse vil samlingen bestående af de $q = q_1 + q_2 + \cdots + q_r$ vektorer være lineært uafhængigt.
- Bevis: En linearkombination af de q vektorer vil kunne skrives som en sum af r vektorer $v_1, v_2, \ldots, v_r$ fra $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_r}$. Men en sådan sum kan kun være nul (iflg. sætn. 7.3), hvis alle er nul. Men $v_i = 0$ medfører, at koefficienterne i linearkombinationen alle er nul.

1.6 En lineær afbildning uden egenværdier

En lineær afbildning uden egenværdier

- Lad $V = \left\{ x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \middle| x_n \in \mathbb{C} \right\}$ være mængden af (komplekse) talfølger.
- V er et vektorrum under elementvis addition og multiplikation med skalar.
- Et medlem af V er et talsæt med uendeligt mange tal.
- Lad $f : V \to V$ være givet ved $f(x) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ for alle $x \in V$.
- f er lineær, men f har ingen egenværdier.
- Thi antag, at $f(x) = \lambda x$, så har vi $(0, x_1, x_2, x_3, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4, \ldots)$.
- Af $0 = \lambda x_1$ følger, at enten $\lambda = 0$ eller $x_1 = 0$.
- Hvis $\lambda = 0$ følger af $x_1 = \lambda x_2$ at $x_1 = 0$ og videre, at $x_n = 0$ for alle n.
- Hvis $x_1 = 0$ og $\lambda \neq 0$, følger, at $x_2 = 0$ og videre, at $x_n = 0$ for alle n.
- Uanset værdien af λ medfører $f(x) = \lambda x$ altså, at $x = 0 = (0, 0, 0, \ldots)$.

1.7 En lineær afbildning med alle tal som egenværdier

En lineær afbildning med alle tal som egenværdier

- Lad igen $V = \left\{ x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \middle| x_n \in \mathbb{C} \right\}$ være mængden af (komplekse) talfølger.
- Lad $f : V \to V$ være givet ved $f(x) = (x_2, x_3, \ldots)$ for alle $x \in V$.
- f er lineær, og ethvert $\lambda \in \mathbb{C}$ er egenværdi.

- Af $f(x) = \lambda x$ fås $(x_2, x_3, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4, \dots)$.
- Dette er tilfældet, når $x_2 = \lambda x_1, x_3 = \lambda x_2 = \lambda^2 x_1$, osv.
- Generelt finder vi, at $f(x) = \lambda x$ er opfyldt, hvis og kun hvis $x_n = \lambda^{n-1} x_1$.
- Ethvert tal $\lambda \in \mathbb{C}$ er altså egenværdi og tilhørende egenvektorer er

  $$x = x_1 \left(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots\right)$$

  for $x_1 \in \mathbb{C}$. Egenrummet E_λ er altså endimensionalt.

1.8 Diagonaliserbare matricer

Diagonaliserbare matricer

- A er *diagonaliserbar*, hvis der findes en invertibel matrix V, så $\Lambda = V^{-1} A V$ er en diagonalmatrix.
- En $n \times n$-matrix A er diagonaliserbar, hvis og kun hvis der findes en invertibel matrix V, hvis søjler er egenvektorer $v_1, v_2, \dots, v_n$ for A.
- I bekræftende fald er $V^{-1} A V$ den diagonalmatrix, der har egenværdierne $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ for A i diagonalen.
- Bevis. Lad $v_1, v_2, \dots, v_n$ være vilkårlige vektorer og $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ vilkårlige tal. Lad $V = [v_1 \; v_2 \; \dots \; v_n]$ og $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.
- Med $I = [e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n]$ er $\Lambda = [\lambda_1 e_1 \quad \lambda_2 e_2 \quad \dots \quad \lambda_n e_n]$ og $V e_k = v_k$.
- Så $V\Lambda = [\lambda_1 V e_1 \quad \lambda_2 V e_2 \quad \dots \quad \lambda_n V e_n] = [\lambda_1 v_1 \quad \lambda_2 v_2 \quad \dots \quad \lambda_n v_n]$.
- Men $AV = [Av_1 \quad Av_2 \quad \dots \quad Av_n]$. Dvs. $AV = V\Lambda$ hvis og kun hvis $Av_i = \lambda_i v_i$ for alle i.

1.9 Sætning 7.6 Diagonal afbildningsmatrix

Sætning 7.6 Diagonal afbildningsmatrix

- Lad $f : V \to V$ være lineær og V endelig-dimensional, $\dim V = n$.
- Lad $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ være en basis for V.
- Så er afbildningsmatricen $F =_v F_v$ diagonal, hvis og kun hvis basen $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ består af egenvektorer for f.
- Bevis: Da vi har ${}_vF_v = [K_v(f(v_1)) \quad K_v(f(v_2)) \quad \dots \quad K_v(f(v_n))]$ fås
- ${}_vF_v = diag(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \Leftrightarrow K_v(f(v_i)) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \mu_i & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$ for alle i.
- Højre side siger $f(v_i) = \mu_i v_i$ for alle i.
- f har altså en diagonal afbildningsmatrix hvis og kun hvis den har n lineært uafhængige egenvektorer.

1.10 Algebraisk og geometrisk multiplicitet

Algebraisk og geometrisk multiplicitet

- Lad A være en $n \times n$-matrix.
- Karakterpolynomiet $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ har n rødder regnet med multiplicitet.
- Hvis roden λ_1 har multiplicitet k i $p(\lambda)$, så har egenværdien λ_1 *algebraisk multiplicitet k*, (betegnelse $\mathrm{am}(\lambda_1)$).
- Hvis egenrummet $E_{\lambda_1} = N(A - \lambda_1 I)$ har dimension j, så har λ_1 *geometrisk multiplicitet j*, (betegnelse $\mathrm{gm}(\lambda_1)$).
- Der gælder: $1 \leq gm(\lambda) \leq am(\lambda)$ for enhver egenværdi λ.
- Bevis: Se side 204.

1.11 Eksempel 1 igen

Eksempel 1 igen

- $V = \mathrm{P}_n(\mathbb{R})$ og lad $f : V \to V$ være givet ved $f(v)(x) = xv'(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.
- Monomierne $m_0(x) = 1, m_1(x) = x, m_2(x) = x^2, \ldots, m_n(x) = x^n$ er egenvektorer for f hørende til egenværdierne $0, 1, 2, \ldots, n$, henholdsvis.
- Afbildningsmatricen F for f mht. monomiebasen er altså diagonalmatricen $F = diag(0, 1, 2, \ldots, n)$.
- Betragter i stedet $g : V \to V$ givet ved $f(v)(x) = v'(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.
- Differentialligningen $v'(x) = \lambda v(x)$ har den fuldstændige løsning $v(x) = Ce^{\lambda x}$.
- Kun for $\lambda = 0$ gælder, at $Ce^{\lambda x}$ er et polynomium $\neq 0$.
- Altså har g kun egenværdien 0. De tilhørende egenvektorer er polynomierne af grad 0.
- Egenrummet er éndimensionalt. Kun i det trivielle tilfælde $n = 0$, findes en basis så afbildningsmatricen er diagonal!