DesignMat Uge 5
Systemer af lineære differentialligninger II

Preben Alsholm

Efterår 2010

1 Lineære differentialligningssystemer

1.1 Lineært differentialligningssystem af første orden

Lineært differentialligningssystem af første orden

- Vi betragtede sidst et lineært og homogent system af n differentialligninger af første orden på formen $\dot{x}(t) = Ax(t)$, hvor

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

- Ved et *inhomogent* lineært ligningssystem af første orden forstås et system, der kan skrives på formen

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + g(t)$$

hvor $g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) & g_2(t) & \cdots & g_n(t) \end{bmatrix}^T$.

1.2 Struktursætningen

Struktursætningen

- Den fuldstændige løsning til $\dot{x}(t) = Ax(t) + g(t)$ er summen af en partikulær løsning og den fuldstændige løsning til det homogene system $\dot{x}(t) = Ax(t)$.
- Sætningen følger af den generelle struktursætning for lineære afbildninger:
- Lad $f : V \to W$ være lineær. Så er den fuldstændige løsning til ligningen $f(x) = b$ summen af en partikulær løsning og den fuldstændige løsning til den homogene ligning $f(x) = 0$.
- Her er f givet ved $f(x)(t) = \dot{x}(t) - Ax(t)$.

- Vores f er lineær, da (1) $f(x+y)(t) = \dot{(x+y)}(t) - A(x+y)(t) = \dot{x}(t) + \dot{y}(t) - Ax(t) - Ay(t) = f(x)(t) + f(y)(t)$, og da (2) $f(kx)(t) = \dot{(kx)}(t) - A(kx)(t) = k\dot{x}(t) - kAx(t) = kf(x)(t)$.

1.3 Eksempel 1 på inhomogent system

Eksempel 1 på inhomogent system

- Betragt systemet

$$\dot{x} = Ax + g = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- Den fuldstændige løsning til det homogene system $\dot{x}(t) = Ax(t)$ fandt vi sidst ved egenværdimetoden til

$$x(t) = c_1 e^{-2t} v_1 + c_2 e^{-2t} v_2 + c_3 e^t v_3$$

  hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, idet egenværdierne for A er -2 (med algebraisk og geometrisk multiplicitet 2) og 1, og hvor de tilhørende egenvektorer er $v_1 = [-1\ 1\ 0]^T$, $v_2 = [1\ 0\ 1]^T$ og $v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$.

- Vi mangler en partikulær løsning $x_p(t)$ til $\dot{x} = Ax + g$.

- Da g er en konstant vektor, gør vi ansatsen $x_p = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$ (altså en konstant vektor).

1.4 Eksempel 1 på inhomogent system (fortsat)

Eksempel 1 på inhomogent system (fortsat)

- Ansatsen $x_p = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$ indsættes i $\dot{x} = Ax + g$.

- Vi får $0 = Ax_p + g$, så $Ax_p = -g$.

- Da A har en invers, er $x_p = -A^{-1}g$, men kan lettere findes ved gausselimination:

- Totalmatricen for $Ax_p = -g$ gausselimineres til reduceret echelonform

$$T = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 & -2 \\ -3 & -5 & 3 & 4 \\ -9 & -9 & 7 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -33 \end{bmatrix}$$

- Altså $x_p = \begin{bmatrix} -11 & -14 & -33 \end{bmatrix}^T$. Dermed er den fuldstændige løsning til $\dot{x} = Ax + g$ givet ved $x(t) = x_p + c_1 e^{-2t} v_1 + c_2 e^{-2t} v_2 + c_3 e^t v_3$, hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

1.5 Eksempel 2 på inhomogent system

Eksempel 2 på inhomogent system

- Betragt systemet $\dot{x} = Ax + g(t)$, hvor A er givet i eksempel 1, men hvor $g(t) = \begin{bmatrix} 10e^{3t} & 2 & 4 \end{bmatrix}^T$.
- Vi har $g(t) = e^{3t} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T = e^{3t}u + v$.
- Vi søger en partikulær løsning $x_p(t)$ og gør ansatsen $x_p = e^{3t}z + w$, hvor z og w er konstante vektorer.
- Ved indsættelse i $\dot{x} = Ax + g(t)$ fås

$$3e^{3t}z = A\left(e^{3t}z + w\right) + e^{3t}u + v$$

- Omordning giver $e^{3t}(Az - 3z + u) + Aw + v = 0$, der skal gælde for alle t.
- Heraf fås $Az - 3z + u = 0$ og $Aw + v = 0$.
- Så $w = -A^{-1}v$ og $z = -(A - 3I)^{-1}u$.
- Altså $x_p = e^{3t}z + w = -e^{3t}(A - 3I)^{-1}u - A^{-1}v$.
- Udregning giver $x_p = -e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}^T$.

1.6 Omskrivning af n'te ordens differentialligning til system af første orden

Omskrivning af n'te ordens differentialligning til system af første orden

- Betragt en normeret lineær differentialligning af n'te orden

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dt} + a_n y = q(t)$$

- Sæt $x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad x_3 = y'', \quad \ldots, \quad x_n = y^{(n-1)}$ så fås systemet

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t) \\
\dot{x}_n(t) &= -a_n x_1(t) - a_{n-1}x_2(t) - \cdots - a_1 x_n(t) + q(t)
\end{aligned}$$

med koefficientmatrix på næste side.

1.7 Omskrivningen fortsat

Omskrivningen fortsat

- Systemet kan nu skrives på formen $\dot{x} = Ax + g(t)$, hvor

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$g(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q(t) \end{bmatrix}$$

1.8 Eksempel på omskrivning

Eksempel på omskrivning

- Betragt $y'' + a_1 y' + a_2 y = q(t)$.
- Sæt $x_1 = y$ og $x_2 = y'$, så fås systemet

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -a_2 x_1(t) - a_1 x_2(t) + q(t) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ q(t) \end{bmatrix}$$

- Betragt $y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = q(t)$.
- Sæt $x_1 = y, \quad x_2 = y'$ og $x_3 = y''$, så fås systemet

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -a_3 x_1(t) - a_2 x_2(t) - a_1 x_3(t) + q(t) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q(t) \end{bmatrix}$$

1.9 Cayley-Hamiltons sætning

Cayley-Hamiltons sætning

- Lad A være en $n \times n$-matrix og lad $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Så gælder, at $p(A) = 0$.
- Bevis. For et generelt bevis se sætning 7.19, p. 218 i LA.
- Er A diagonaliserbar, kan sætningen let bevises:
- Lad $v_1, v_2, \ldots, v_n$ være en basis for $\mathbb{R}^n$ (eller $\mathbb{C}^n$) bestående af egenvektorer for A.
- Skriv $x \in \mathbb{R}^n$ (eller $\mathbb{C}^n$) på formen $x = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$.
- Så fås $p(A)\,x = c_1 p(A)\,v_1 + \cdots + c_n p(A)\,v_n = c_1 p(\lambda_1)\,v_1 + \cdots + c_n p(\lambda_n)\,v_n = 0$.
- Men hvis en kvadratisk matrix B opfylder $Bx = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}^n$ (eller $\mathbb{C}^n$), så gælder $B = 0$.
- Altså har vi $p(A) = 0$.

1.10 Anvendelse af Cayley-Hamiltons sætning

Anvendelse af Cayley-Hamiltons sætning

- Eksempel. $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$. Karakterpolynomiet er $p(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$.
- Cayley-Hamilton giver, at $p(A) = -A^3 - 3A^2 + 4I = 0$.
- Hvis $\dot{x} = Ax$ har vi $\frac{d^2}{dt^2}x = \frac{d}{dt}\dot{x} = \frac{d}{dt}Ax = A\frac{d}{dt}x = A\dot{x} = A^2x$ og generelt $\frac{d^k}{dt^k}x = A^k x$.
- Derfor gælder, at $p\left(\frac{d}{dt}\right)x = p(A)\,x = 0$.
- Altså løser hver af komponenterne x_i af x differentialligningen $p\left(\frac{d}{dt}\right)x_i = 0$.
- Så $-x_i''' - 3x_i'' + 4x_i = 0$ for $i = 1, 2, 3$.
- Karakterligningens rødder er -2 (alg. mult. 2) og 1.
- Så $x_i(t) = c_{i1}e^t + c_{i2}e^{-2t} + c_{i3}te^{-2t}$, hvor konstanterne for forskellige værdier af i afhænger af hinanden.

1.11 Det minimale polynomium for en matrix

Det minimale polynomium for en matrix

- *Det minimale polynomium* for en kvadratisk matrix A er det ikke-trivielle polynomium p af mindst mulig grad for hvilket det gælder, at $p(A) = 0$.
- Er egenværdierne for A alle simple, så er det minimale polynomium identisk med karakterpolynomiet.
- Er A diagonaliserbar, så er det minimale polynomium $p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_k - \lambda)$, hvor egenværdierne $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ er indbyrdes forskellige.
- I eksemplet ovenfor fandt vi det $(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$.
- Da A viste sig at være diagonaliserbar, er det minimale polynomium $p(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 2) = -\lambda^2 - \lambda + 2$.
- Dette betyder altså, at $-A^2 - A + 2I = 0$.
- Komponenterne til løsningerne til $\dot{x} = Ax$ opfylder dermed alle differentialligningen $-x_i'' - x_i' + 2x_i = 0$.