Symmetriske og ortogonale matricer Uge 6

Preben Alsholm

Efterår 2010

1 Symmetriske og ortogonale matricer

1.1 Skalarprodukt og Cauchy-Schwarz' ulighed

Skalarprodukt og Cauchy-Schwarz' ulighed

- *Det sædvanlige skalarprodukt* mellem vektorerne $x, y \in \mathbb{R}^n$ er givet ved
$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$
- Når x og y opfattes som søjlevektorer har vi $\langle x, y \rangle = x^T y = y^T x$.
- *Den euklidiske norm* af vektoren x er $\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.
- Der gælder: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$, $\langle sx, y \rangle = s \langle x, y \rangle$, når $s \in \mathbb{R}$.
- Cauchy-Schwarz' ulighed: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$.
- Bevis. $\|x + sy\|^2 = \langle sx + y, sx + y \rangle = s^2 \langle x, x \rangle + 2s \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = s^2 \|x\|^2 + 2s \langle x, y \rangle + \|y\|^2$.
- Dette polynomium i s er åbenbart ikke-negativ for alle $s \in \mathbb{R}$.
- Diskriminanten er derfor ikke-positiv: $4 \langle x, y \rangle^2 - 4 \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$. Heraf uligheden.

1.2 Ortogonalsystem lineært uafhængigt

Ortogonalsystem lineært uafhængigt

- Sætning 8.15. Hvis $v_1, v_2, \ldots, v_p$ er indbyrdes ortogonale egentlige vektorer i $\mathbb{R}^n$, så er de lineært uafhængige.
- Bevis. Antag $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_p v_p = 0$. Så fås for ethvert j:
$$\begin{aligned} 0 &= \langle c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_p v_p, v_j \rangle \\ &= c_1 \langle v_1, v_j \rangle + c_2 \langle v_2, v_j \rangle + \cdots + c_p \langle v_p, v_j \rangle \\ &= c_j \langle v_j, v_j \rangle = c_j \|v_j\|^2 \end{aligned}$$
- Men $\|v_j\|^2 > 0$, så $c_j = 0$. Dette gælder for alle $j = 1, \ldots, p$.

1.3 Gram-Schmidt's ortogonaliseringsmetode

Gram-Schmidt's ortogonaliseringsmetode

- Lad $u_1, u_2, \ldots, u_p$ være lineært uafhængige vektorer i $\mathbb{R}^n$. Vi bestemmer p ortogonale enhedsvektorer $v_1, v_2, \ldots, v_p$ så $\operatorname{span}(v_1, v_2, \ldots, v_p) = \operatorname{span}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.
- Sæt $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$. Så har vi $\operatorname{span}(v_1) = \operatorname{span}(u_1)$.
- Sæt $w_2 = u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle \, v_1$ og dernæst $v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$.
- Så har vi $\operatorname{span}(v_1, v_2) = \operatorname{span}(u_1, u_2)$ og $\langle v_2, v_1 \rangle = 0$.
- Sæt $w_3 = u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle \, v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle \, v_2$ og dernæst $v_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|}$.
- Så har vi $\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3) = \operatorname{span}(u_1, u_2, u_3)$ og $\langle v_3, v_1 \rangle = \langle v_3, v_2 \rangle = 0$.
- Fortsæt således.
- Eksempel 1 i Maple-worksheet.

1.4 Ortogonale matricer

Ortogonale matricer

- En kvadratisk matrix Q kaldes *ortogonal*, hvis $Q^T Q = I$.
- Udsagnet $Q^T Q = I$ udtrykker, at søjlerne i Q er indbyrdes ortogonale enhedsvektorer.
- En matrix Q er ortogonal, hvis og kun hvis den er regulær med invers $Q^{-1} = Q^T$.
- Produktet af to ortogonale matricer Q_1 og Q_2 er en ortogonal matrix.
- Bevis. $(Q_1 Q_2)^T Q_1 Q_2 = Q_2^T Q_1^T Q_1 Q_2 = Q_2^T I Q_2 = Q_2^T Q_2 = I$.
- En ortogonal matrix Q opfylder også $QQ^T = I$.
- Bevis. Følger af at $Q^T = Q^{-1}$ og $QQ^{-1} = I$.
- Rækkerne i en ortogonal matrix er altså også indbyrdes ortogonale enhedsvektorer!

1.5 Egenværdier for symmetriske matricer I

Egenværdier for symmetriske matricer I

- En kvadratisk matrix $A = [a_{ij}]$ kaldes *symmetrisk*, hvis $a_{ij} = a_{ji}$ for alle i og j. Altså hvis $A^T = A$.
- Lad A være en reel og symmetrisk $n \times n$-matrix. Så er rødderne i karakterpolynomiet reelle.

- Bevis. Lad $\lambda \in \mathbb{C}$ være rod i karakterpolynomiet og lad $v \in \mathbb{C}^n$ opfylde $Av = \lambda v$ og $v \neq 0$.
- Lad $v = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ og $\overline{v} = [\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}]^T$ (kompleks konjugation).
- Så fås

$$\begin{aligned} \overline{v}^T A v &= \overline{v}^T \lambda v = \lambda \overline{v}^T v = \lambda \left(\overline{x_1} x_1 + \overline{x_2} x_2 + \cdots + \overline{x_n} x_n \right) \\ &= \lambda \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 \right) \end{aligned}$$

- Venstre side er reel, da

$$\overline{\overline{v}^T A v} = v^T A \overline{v} = (Av)^T \overline{v} = \overline{v}^T A v$$

- Derfor er også $\lambda \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 \right)$ reel. Da $|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2$ er reel og positiv, er λ reel.

1.6 Egenværdier for symmetriske matricer II

Egenværdier for symmetriske matricer II

- Egenvektorer hørende til forskellige egenværdier for en reel symmetrisk matrix er ortogonale.
- Bevis. Hvis $Av_1 = \lambda_1 v_1$ og $Av_2 = \lambda_2 v_2$, så fås

$$\begin{aligned} \lambda_2 \langle v_2, v_1 \rangle &= \lambda_2 v_2^T v_1 = (A v_2)^T v_1 \\ &= v_2^T A v_1 = \lambda_1 v_2^T v_1 = \lambda_1 \langle v_2, v_1 \rangle \end{aligned}$$

- Altså $(\lambda_2 - \lambda_1) \langle v_2, v_1 \rangle = 0$. Men $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, så $\langle v_2, v_1 \rangle = 0$.

1.7 Spektralsætningen for symmetriske matricer

Spektralsætningen for symmetriske matricer

- Lad A være en reel og symmetrisk $n \times n$-matrix. Så findes der en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ bestående af egenvektorer for A.
- A kan dermed diagonaliseres vha. en ortogonal matrix Q, altså

$$Q^T A Q = \Lambda = diag\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right)$$

- Bevis. I det tilfælde, at alle egenværdier er forskellige, følger resultatet af de foregående resultater.
- Det generelle tilfælde, hvor den algebraiske multiplicitet af en egenværdi λ kan være større end 1, behandles i beviset for Sætning 8.33. Vi springer det over.
- Navnet *spektralsætningen* kommer fra betegnelsen *spektrum* for mængden af egenværdier.

1.8 Positiv definit matrix

Positiv definit matrix

- En kvadratisk matrix A kaldes *positiv definit*, hvis $x^T A x > 0$ for alle vektorer $x \neq 0$.
- Lad A være en reel og symmetrisk $n \times n$-matrix. Så er A positiv definit hvis og kun hvis alle egenværdier er positive.
- Bevis. Lad Q være en diagonaliserende ortogonal matrix. Så gælder $Q^T A Q = \Lambda = diag\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ og $Q \Lambda Q^T = A$.
- Så med $w = Q^T u$ fås $u^T A u = u^T Q \Lambda Q^T u = w^T \Lambda w = \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 + \cdots + \lambda_n w_n^2$.
- Hvis alle egenværdierne er positive, er dette positivt, når $u \neq 0$, idet da også $w \neq 0$.
- Hvis omvendt $\lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 + \cdots + \lambda_n w_n^2 > 0$ for alle $u \neq 0$ (altså dermed for alle $w \neq 0$) må alle egenværdier være positive.

1.9 Kvadratisk form I

Kvadratisk form I

- Et udtryk af formen

$$K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} k_{ij} x_i x_j$$

  hvor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, kaldes en *kvadratisk form*.
- Navnet indikerer, at hvert led har total grad 2. Udtrykket er et *homogent polynomium* i $x_1, x_2, \ldots, x_n$ af grad 2.
- Eksempel 2. $K(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1 x_2 + 7x_2^2$.
- Eksempel 3. $K(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 2x_1 x_2 + 6x_2 x_3 + 8x_2^2 + 11x_3^2$.
- Eksempel 4. $K(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1^2 - 2x_1 x_2 + 6x_2 x_3 + 8x_2^2 + 11x_3^2 - 8x_4 x_1$

1.10 Kvadratisk form II

Kvadratisk form II

- En kvadratisk form $K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = K(x)$ kan skrives entydigt på formen

$$K(x) = x^T A x$$

  hvor A er en symmetrisk $n \times n$-matrix.
- A er givet ved $A = [a_{ij}]$ hvor $a_{ii} = k_{ii}$ og $a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2} k_{ij}$ for $i < j$.

- Eksempel 2: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$. Eksempel 3: $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & 3 \\ 0 & 3 & 11 \end{bmatrix}$. Eksempel 4: $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 11 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1.11 Kvadratisk form III

Kvadratisk form III

- En kvadratisk form $K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = K(x)$ kan vha. en ortogonal substitution $x = Qy$ skrives på formen

$$K(x) = \widetilde{K}(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

- Bevis. Lad A være symmetrisk og $K(x) = x^T A x$. Lad Q være en diagonaliserende ortogonal matrix: $Q^T A Q = \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.
- Så fås, når $x = Qy$ at

$$\begin{aligned} K(x) &= x^T A x = (Qy)^T AQy = y^T Q^T AQy \\ &= y^T \Lambda y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \end{aligned}$$

- Eksempel 2: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$. Egenværdier $5 \pm 2\sqrt{2}$. Positiv definit.
- Lettere at finde sporet og determinanten: $\det A = 17$ og spor $A = 10$, så begge egenværdier er positive.

1.12 Kvadratisk form IV

Kvadratisk form IV

- Eksempel 3: $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & 3 \\ 0 & 3 & 11 \end{bmatrix}$. Egenværdier ca. $3.68, 6.44, 12, 89$. Positiv definit.
- Determinanten findes til 305 og sporet er 23, *men dette er ikke nok til en konklusion*.
- Eksempel 4: $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 11 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Egenværdier ca. $-2.50, 5.57, 7.04, 12.89$. Indefinit.
- Determinanten findes til -1264, så der er både negative og positive egenværdier: A er indefinit.