DesignMat Uge 7
Systemer af lineære differentialligninger III

Preben Alsholm

Efterår 2010

1 System af differentialligninger af 2. orden

1.1 Omskrivning af system af koblede 2. ordens differentialligninger til system af første orden

Omskrivning af system af koblede 2. ordens differentialligninger til system af første orden

- Betragt systemet

$$\begin{aligned} y_1'' + a_1 y_1' + b_1 y_2' + a_0 y_1 + b_0 y_2 &= q_1(t) \\ y_2'' + c_1 y_1' + d_1 y_2' + c_0 y_1 + d_0 y_2 &= q_2(t) \end{aligned}$$

- Sæt $x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_1', x_4 = y_2'$ så fås systemet

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -a_1 x_3 - b_1 x_4 - a_0 x_1 - b_0 x_2 + q_1(t) \\ \dot{x}_4(t) &= -c_1 x_3 - d_1 x_4 - c_0 x_1 - d_0 x_2 + q_2(t) \end{aligned}$$

  med koefficientmatrix på næste side.

- Man kunne i stedet have valgt en anden organisering, f.eks. $x_1 = y_1, \quad x_2 = y_1', \quad x_3 = y_2, \quad , x_4 = y_2'$.

1.2 Omskrivningen fortsat

Omskrivningen fortsat

- Med valget $x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_1', x_4 = y_2'$ fås

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -b_0 & -a_1 & -b_1 \\ -c_0 & -d_0 & -c_1 & -d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

- Med valget $x_1 = y_1, \quad x_2 = y_1', \quad x_3 = y_2, \quad , x_4 = y_2'$ fås i stedet

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -b_0 & -b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & -d_0 & -d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ q_1(t) \\ 0 \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

- Maple-eksempler.

1.3 Afkobling af specielt system af koblede 2. ordens differentialligninger

Afkobling af specielt system af koblede 2. ordens differentialligninger

- Betragt systemet
$$M\ddot{u} + Ku = F(t)$$
hvor M og K er (konstante) $n \times n$-matricer, $F(t) = [F_1(t) \; F_2(t) \; \dots \; F_n(t)]^T$ og $u = [u_1 \; u_2 \; \dots \; u_n]^T$.

- Det specielle ved systemet er, at kun $\ddot{u}$ og u forekommer, ikke $\dot{u}$.

- Eksempel. Med $n = 2$ og M =diag(m_1, m_2) kan systemet skrives på formen
$$\begin{aligned} m_1\ddot{u}_1 + k_{11}u_1 + k_{12}u_2 &= F_1(t) \\ m_2\ddot{u}_2 + k_{21}u_1 + k_{22}u_2 &= F_2(t) \end{aligned}$$

- Det tilsvarende homogene system $M\ddot{u} + Ku = 0$ kan løses ved afkobling som for et system af første orden.

1.4 Afkobling I

Afkobling I

- Antag, at $M = B^2$, hvor B er en reel, symmetrisk og invertibel matrix. Antag, at også K er reel og symmetrisk.

- Så kan $M\ddot{u} + Ku = 0$ skrives $B\ddot{u} + ABu = 0$, hvor $A = B^{-1}KB^{-1}$.

- Da A er symmetrisk kan den diagonaliseres vha. en ortogonal matrix $Q = [v_1 \; v_2 \; \dots \; v_n]$: $A = Q\Lambda Q^T$, hvor $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

- $B\ddot{u} + ABu = 0$ kan nu skrives
$$B\ddot{u} + Q\Lambda Q^T Bu = 0$$

- og dermed $Q^T B\ddot{u} + \Lambda Q^T Bu = 0$

- Definér en ny vektorfunktion y ved $y(t) = Q^T Bu(t)$.

- Så fås
$$\ddot{y} + \Lambda y = 0$$

- Dette system er *afkoblet*:
$$\ddot{y}_1 + \lambda_1 y_1 = 0, \quad \ddot{y}_2 + \lambda_2 y_2 = 0, \quad \dots \quad , \ddot{y}_n + \lambda_n y_n = 0$$

1.5 Afkobling II

Afkobling II

- Antag, at $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ alle er positive.
- Den fuldstændige løsning til $\ddot{y}_i + \lambda_i y_i = 0$ er

$$y_i(t) = c_i \cos\left(t\sqrt{\lambda_i}\right) + d_i \sin\left(t\sqrt{\lambda_i}\right) = A_i \cos\left(t\sqrt{\lambda_i} + \phi_i\right)$$

  hvor amplituden $A_1 \geq 0$ og faseforskydningen $\phi_1 \in \mathbb{R}$.

- Den fuldstændige løsning til $M\,\ddot{u} + K\,u = 0$:

$$\begin{aligned} u(t) &= B^{-1}Qy(t) = B^{-1}\left[v_1\ v_2\ \ldots\ v_n\right]\begin{bmatrix} A_1 \cos\left(t\sqrt{\lambda_1} + \phi_1\right) \\ A_2 \cos\left(t\sqrt{\lambda_2} + \phi_2\right) \\ \vdots \\ A_n \cos\left(t\sqrt{\lambda_n} + \phi_n\right) \end{bmatrix} \\ &= A_1 \cos\left(t\sqrt{\lambda_1} + \phi_1\right) B^{-1}v_1 + A_2 \cos\left(t\sqrt{\lambda_2} + \phi_2\right) B^{-1}v_2 \\ &\quad + \cdots + A_n \cos\left(t\sqrt{\lambda_n} + \phi_n\right) B^{-1}v_n \end{aligned}$$

1.6 Eksempel 1 (a)

Eksempel 1 (a)

- Betragt et system af to masser m_1 og m_2 og 3 fjedre med fjederkonstanterne k_1, k_2 og k_3:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{u}_1 + (k_1 + k_2)\,u_1 - k_2u_2 &= 0 \\ m_2\ddot{u}_2 - k_2u_1 + (k_2 + k_3)\,u_2 &= 0 \end{aligned}$$

- Her har vi $M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$ og $K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$.
- M kan skrives $M = B^2$ med $B = \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{bmatrix}$.
- $A = B^{-1}KB^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1}(k_1 + k_2) & -\frac{k_2}{\sqrt{m_1}\sqrt{m_2}} \\ -\frac{k_2}{\sqrt{m_1}\sqrt{m_2}} & \frac{1}{m_2}(k_2 + k_3) \end{bmatrix}$
- Determinanten er $\det A = \frac{1}{m_1m_2}(k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3) > 0$.
- Sporet er $\mathrm{Spor}(A) = \frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2} > 0$.
- Derfor er begge egenværdier positive.

1.7 Eksempel 1 (b)

Eksempel 1 (b)

- Betragt tilfældet $k_1 = k_2 = k_3 = k$ og $m_1 = m_2 = m$. Så har vi

$$A = B^{-1}KB^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} \end{bmatrix}$$

- Egenværdierne for A er $\frac{k}{m}$ og $\frac{3k}{m}$.
- Basis for egenrummet hørende til $\frac{k}{m}$ udgøres af $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.
- Basis for egenrummet hørende til $\frac{3k}{m}$ udgøres af $v_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$.

1.8 Eksempel 1 (c)

Eksempel 1 (c)

- Den fuldstændige løsning til $M\,\ddot{u} + K\,u = 0$ er derfor

$$\begin{aligned} u(t) &= A_1 \cos\left(t\sqrt{\lambda_1} + \phi_1\right) B^{-1}v_1 + A_2 \cos\left(t\sqrt{\lambda_2} + \phi_2\right) B^{-1}v_2 \\ &= c_1 \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}} + \phi_1\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \cos\left(t\sqrt{\frac{3k}{m}} + \phi_2\right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- hvor $c_1 = \frac{1}{\sqrt{m}}A_1, c_2 = \frac{1}{\sqrt{m}}A_2$ og ϕ_1, ϕ_2 bestemmes ved begyndelsesbetingelserne.
- $c_2 = 0$ og $c_1 > 0$ svarer til, at de to masser svinger i fase (altså med fast indbyrdes afstand) med vinkelfrekvensen $\sqrt{\frac{k}{m}}$.
- $c_1 = 0$ og $c_2 > 0$ svarer til, at de to masser svinger i modfase med vinkelfrekvensen $\sqrt{\frac{3k}{m}}$.

1.9 Det generelle tilfælde

Det generelle tilfælde

- Betragt nu systemet

$$M\,\ddot{u} + C\dot{u} + K\,u = F(t)$$

hvor M, C og K er (konstante) $n \times n$-matricer, $F(t) = [F_1(t)\ \ F_2(t)\ \ \ldots\ \ F_n(t)]^T$ og $u = [u_1\ u_2\ \ldots\ u_n]^T$.

- Eksempel. Med $n = 2$ og M =diag(m_1, m_2) , C =diag(c_1, c_2) kan systemet skrives på formen

$$\begin{aligned} m_1\ddot{u}_1 + c_1\dot{u}_1 + k_{11}u_1 + k_{12}u_2 &= F_1(t) \\ m_2\ddot{u}_2 + c_2\dot{u}_2 + k_{21}u_1 + k_{22}u_2 &= F_2(t) \end{aligned}$$

- Det tilsvarende homogene system $M\,\ddot{u} + C\dot{u} + K\,u = 0$ kan ikke generelt løses som ovenfor, hvor $C = 0$.
- Vi kan i stedet på standard vis omskrive til et system af $2n$ ligninger af første orden.
- Dette system løses så på sædvanlig måde.

1.10 Eksempel 2 (a)

Eksempel 2 (a)

- Betragt igen systemet af to masser m_1 og m_2 og 3 fjedre med fjederkonstanterne k_1, k_2 og k_3, men denne gang med dæmpninger proportionale med forskydningshastighederne:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{u}_1 + c_1\dot{u}_1 + (k_1 + k_2)\,u_1 - k_2 u_2 &= F_1(t) \\ m_2\ddot{u}_2 + c_2\dot{u}_2 - k_2 u_1 + (k_2 + k_3)\,u_2 &= F_2(t) \end{aligned}$$

- Indfør nye variable $p_1 = m_1\dot{u}_1, p_2 = m_2\dot{u}_2$ og sæt $q = (u_1, u_2, p_1, p_2)$.
- Vores system kan nu skrives på formen $\dot{q} = Aq + \widetilde{F}(t)$, hvor

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_2} \\ -k_1 - k_2 & k_2 & -\frac{c_1}{m_1} & 0 \\ k_2 & -k_2 - k_3 & 0 & -\frac{c_2}{m_2} \end{bmatrix}$$

- og hvor $\widetilde{F}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & F_1(t) & F_2(t) \end{bmatrix}^T$.

1.11 Eksempel 2 (b)

Eksempel 2 (b)

- Karakterpolynomiet er $\lambda^4 + \left(\frac{c_1}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}\right)\lambda^3 + \left(\frac{1}{m_1}(k_1 + k_2) + \frac{1}{m_2}(k_2 + k_3) + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}\right)\lambda^2 + \left(\frac{c_2}{m_1 m_2}(k_1 + k_2) + \frac{c_1}{m_1 m_2}(k_2 + k_3)\right)\lambda + \frac{1}{m_1 m_2}(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)$
- Routh-Hurwitz' kriterium: *Alle rødderne for polynomiet $p = \lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4$ har negativ realdel, hvis og kun hvis*

$$a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{og} \quad a_4 > 0$$

- Kun 3×3-determinanten kræver arbejde, men kan også vises at være positiv (sålænge mindst én af c_1 og c_2 er positive).
- Fysisk set er resultatet klart, idet dæmpning af systemet må medføre, at udsvingene går mod nul, når $t \to \infty$.

1.12 Eksempel 2 (c)

Eksempel 2 (c)

- Med $k_1 = k_2 = k_3 = k$ og $m_1 = m_2 = m$ fås karakterpolynomiet til $\lambda^4 + \frac{1}{m}(c_1 + c_2)\lambda^3 + \frac{1}{m^2}(4km + c_1c_2)\lambda^2 + \frac{2k}{m^2}(c_1 + c_2)\lambda + \frac{3k^2}{m^2}$.
- Hvis også $c_1 = c_2$, så kan polynomiet skrives $\left(\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{3k}{m}\right)\left(\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m}\right)$.
- Hvis $c_1 = c_2$, så kan "omvejen" via førsteordenssystemet faktisk undgås.
- Hvis $c_1 \neq c_2$, så fylder rødderne i karakterpolynomiet i det symbolske tilfælde meget!
- Selv hvis $c_1 > 0$, men $c_2 = 0$ fylder rødderne i karakterpolynomiet enormt.