Funktion af flere variable I Uge 8

Preben Alsholm

Efterår 2010

1 Funktion af flere variable

1.1 Norm i generelt vektorrum

Norm i generelt vektorrum

- Lad V være et (reelt eller komplekst) vektorrum
- En *norm* $\|\|$ i V er en funktion, der til enhver vektor knytter et ikke-negativt reelt tal og opfylder følgende krav:
- $\|x\| \geq 0$ for alle $x \in V$ og $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- For $t \in \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) og $x \in \mathbb{V}$ gælder at $\|tx\| = |t| \, \|x\|$.
- *Trekantsuligheden* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- En norm er et mål for en vektors størrelse.
- I Maple er adskillige normer til rådighed, når $V = \mathbb{R}^k$ eller $V = \mathbb{C}^k$.

1.2 Norm og skalarprodukt i $\mathbb{R}^k$

Norm og skalarprodukt

- Det sædvanlige skalarprodukt i $\mathbb{R}^k$: $\langle x, y\rangle = x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_k y_k$.
- Den sædvanlige *norm* af $x \in \mathbb{R}^k$ er $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2}$.
- Der gælder $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- For $t \in \mathbb{R}$ og $x \in \mathbb{R}^k$ gælder at $\|tx\| = |t| \, \|x\|$.
- *Trekantsuligheden* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- Bevis: Vi udnytter Cauchy-Schwarz' ulighed: $|x \cdot y| \leq \|x\| \, \|y\|$ (fra uge 6).
- Vi finder

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (x+y)\cdot(x+y) = x\cdot x + 2x\cdot y + y\cdot y \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2x\cdot y \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

1.3 Punktmængder i $\mathbb{R}^k$: Definitioner

Punktmængder i flerdimensionale rum: Definitioner

- *Åben kugle*, centrum z, radius r : $K(z,r) = \{x \mid \|x - z\| < r\}$.
- z er et *indre* punkt i mængden A hvis $\exists r > 0$ så $K(z,r) \subset A$.
- A er *åben*, hvis ethvert punkt i A er indre.
- z tilhører *randen* ∂A af A hvis $\forall r > 0 : K(z,r) \cap A \neq \varnothing \wedge K(z,r) \cap \complement A \neq \varnothing$.
- *Afslutningen* af A er $\overline{A} = A \cup \partial A$.
- A er *lukket* (eller *afsluttet)* hvis $\partial A \subseteq A$, altså hvis $\overline{A} = A$.
- A er *begrænset* hvis $\exists R > 0$ så $A \subset K(0,R)$.

1.4 Funktion af flere variable: Definitioner

Funktion af flere variable: Definitioner

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Notationen $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ betyder, at funktionen f er defineret i A og har værdier i $\mathbb{R}^m$.
- Altså hvis $x \in A$ så gælder $f(x) \in \mathbb{R}^m$.
- *Billedmængden* er $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$
- f er *surjektiv* ("på") hvis $f(A) = \mathbb{R}^m$.
- f er *injektiv* (eller *enentydig*, 1-1) hvis $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$.
- *Grafen* for f er $\{(x,y) \mid x \in A \wedge y = f(x)\}$. Grafen er en delmængde af $\mathbb{R}^{k+m}$.
- Se Maple-worksheet for grafer og niveaukurver for reel funktion af 2 variable.

1.5 Grænseværdi, definition og Eksempel 1 (p. 28)

Grænseværdi, definition og Eksempel 1 (p. 28)

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Punktet $u \in \mathbb{R}^k$ kaldes et *akkumulationspunkt* for A, hvis $K(u,r) \cap (A \setminus \{u\}) \neq \varnothing$ for alle $r > 0$.
- Lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ og u et akkumulationspunkt for A.
- Lad $a \in \mathbb{R}^m$. Vi vil sige, at $f(x) \to a$ for $x \to u$, hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < \|x - u\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - a\| < \varepsilon$$

- Anden skrivemåde: $\lim_{x \to a} f(x) = a$.

- Eksempel 1: Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ er defineret ved

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

- Vi har $f(x,0) = 0$ for alle $x \neq 0$. Så $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$.
- Vi har $f(x,x) = \frac{1}{2}$ for alle $x \neq 0$. Så $\lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{1}{2}$.
- Konklusion: $f(x,y)$ har ingen grænseværdi for $(x,y) \to (0,0)$.

1.6 Grænseværdi, Eksempel 4 (p. 29)

Grænseværdi, Eksempel 4 (p. 29)

- Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0,0)$ ved

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

- Vi har $f(x,0) = 0$ for alle $x \neq 0$. Så $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$.
- Vi har for $k \neq 0$ og $x \neq 0$

$$f(x,kx) = \frac{kx^3}{x^4+k^2x^2} = \frac{kx}{x^2+k^2} \to 0 \text{ for } x \to 0$$

- Det er nærliggende at tro, at $f(x,y)$ har grænseværdien 0 for $(x,y) \to (0,0)$. Men det er GALT!
- Vi har nemlig for alle $x \neq 0$

$$f\left(x,x^2\right) = \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}$$

- Altså har $f(x,y)$ ikke nogen grænseværdi for $(x,y) \to (0,0)$.

1.7 Grænseværdi, Eksempel 2 (p. 28)

Grænseværdi, Eksempel 2 (p. 28)

- Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0,0)$ ved

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

- Vi vil vise, at $f(x,y) \to 0$ for $(x,y) \to (0,0)$.
- Vi har

$$\begin{aligned} |f(x,y) - 0| &= \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{y^2}{x^2+y^2}|x| \\ &\leq |x| \end{aligned}$$

- Lad nu $\varepsilon > 0$ være givet. Hvis blot $\|(x,y) - (0,0)\| = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$ vil også $|x| < \varepsilon$ og dermed $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$.
- Altså har $f(x,y)$ grænseværdien 0 for $(x,y) \to (0,0)$.

1.8 Kontinuitet, Definition

Kontinuitet, Definition

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ og $u \in A$.
- f er *kontinuert* i u, hvis $\lim_{x \to u} f(x) = f(u)$.
- Hvis f er kontinuert i alle punkter af A, siges f at være kontinuert i A.
- Hvis f og g begge er kontinuerte i u, så er $f + g$ og $f - g$ kontinuerte i u.
- Hvis $m = 1$ gælder yderligere, at fg og $\frac{f}{g}$ er kontinuert i u (den sidste forudsat $g(u) \neq 0$).
- Hvis $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $B \supseteq f(A)$ og $g : B \to \mathbb{R}^n$ begge er kontinuerte, så er $g \circ f$ kontinuert.

1.9 Hovedsætninger om kontinuerte funktioner I

Hovedsætninger om kontinuerte funktioner I

- Lad $r : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ være kontinuert.
- Punktmængden $\mathcal{K} = \left\{ x \in \mathbb{R}^k \,|\, x = r(t), t \in I \right\}$ er da en *kontinuert kurve* i $\mathbb{R}^k$.
- Mængden $A \subseteq \mathbb{R}^k$ er *sammenhængende*, hvis ethvert par af punkter fra A kan forbindes med en kontinuert kurve, der helt forløber i A.
- Hovedsætning 1. Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ være sammenhængende og $f : A \to \mathbb{R}^m$ kontinuert. Så er $f(A)$ også sammenhængende.
- Bevis: Lad $u, v \in f(A)$. Der eksisterer $x, y \in A$, så $u = f(x)$ og $v = f(y)$. Men x og y kan forbindes med en kontinuert kurve i A givet ved parameterfremstilling $t \to r(t), t \in I$.
- Men så vil $t \to f(r(t))$ være en kontinuert kurve i $f(A)$, der forbinder u med v.

1.10 Hovedsætninger om kontinuerte funktioner II

Hovedsætninger om kontinuerte funktioner II

- Hovedsætning 2. Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ være lukket (= afsluttet) og begrænset og $f : A \to \mathbb{R}^m$ kontinuert. Så er $f(A)$ også lukket og begrænset.
- Beviset er ikke helt simpelt, så vi udelader det.
- Sætningen anvendt på specialtilfældet $m = 1$ viser, at en kontinuert funktion af en eller flere variable antager en største- og en mindsteværdi på en lukket og begrænset mængde.

1.11 Hovedsætninger om kontinuerte funktioner III

Hovedsætninger om kontinuerte funktioner III

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og $f : A \to \mathbb{R}^m$. Vi sammenskriver definitionen af kontinuitet og grænseværdi:
- f er kontinuert i $x \in A$, hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \|h\| < \delta \wedge x + h \in A \Longrightarrow \|f(x+h) - f(x)\| < \varepsilon$$

- δ vil normalt afhænge af x (og af ε).
- f er *uniformt kontinuert* i A hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \|h\| < \delta \wedge x + h \in A \Longrightarrow \|f(x+h) - f(x)\| < \varepsilon$$

  hvor der til $\varepsilon > 0$ kan vælges et δ *fælles for alle* $x \in A$.
- Hovedsætning 3. Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ være lukket og begrænset og $f : A \to \mathbb{R}^m$ kontinuert. Så er f uniformt kontinuert.
- Beviset er ikke simpelt, så vi udelader det.
- Hvis A er begrænset, men ikke lukket, og $f : A \to \mathbb{R}^m$ kan udvides til en kontinuert funktion på afslutningen $\overline{A}$. Så er f uniformt kontinuert på A.
- Illustreret for $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i Maple worksheet.