# Funktion af flere variable II Uge 9

Preben Alsholm

Efterår 2010

## 1 Funktion af flere variable

### 1.1 Differentiabilitet for reel funktion af én variabel

**Differentiabilitet for reel funktion af én variabel**

- $f$ er *differentiabel* i $x$, hvis grænseværdien
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
eksisterer. I bekræftende fald kaldes grænseværdien for differentialkvotienten, og den betegnes med $f'(x)$.
- Anderledes sagt: $f$ er differentiabel i $x$ med differentialkvotient $a$, hvis
$$f(x+h)-f(x)=ah+\varepsilon(h)|h|$$
hvor $\varepsilon(h)\to 0$ for $h\to 0$.
- At $f$ er differentiabel i $x$ betyder altså, at $f(x+h)$ approksimeres godt ved $f(x)+ah$, når $|h|$ er lille.

### 1.2 Differentiabilitet for reel funktion af flere variable

**Differentiabilitet for reel funktion af flere variable**

- Lad $A\subseteq\mathbb{R}^k$ og lad $x\in A$ være indre. Lad $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$.
- $f$ er differentiabel i $x$ hvis der findes $a\in\mathbb{R}^k$ så
$$f(x+h)-f(x)=a\cdot h+\varepsilon(h)\|h\|$$
hvor $\varepsilon(h)\to 0$ for $h\to 0$. (Her er $a\cdot h$ skalarproduktet mellem $a$ og $h$.)
- At $f$ er differentiabel i $x$ betyder altså, at $f(x+h)$ approksimeres godt ved $f(x)+a\cdot h$, når $\|h\|$ er lille.
- Vektoren $a$ kaldes *gradienten* af $f$ i $x$ og betegnes grad $f(x)$ eller $\nabla f(x)$.
- Udtrykket $a\cdot h$ betegnes differentialet af $f$ i $x$. Betegnelse $df(x,h)=h\cdot\nabla f(x)$.
- Vi har altså $\Delta f=f(x+h)-f(x)=df(x,h)+\varepsilon(h)\|h\|\simeq df(x,h)$ for små $\|h\|$.

## 1.3 Partiel differentiation

**Partiel differentiation**

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og lad $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) \in A$. Lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.
- Antag, at funktionen $g(t) = f(t, x_2, x_3, \ldots, x_k)$ er defineret i en omegn om $x_1$.
- Hvis $g$ er differentiabel i $x_1$, siges $f$ at have en partiel afledet i $x$ mht. førstekoordinaten.
- Den partielle afledede $f'_{x_1}(x) = g'(x_1)$. Andre betegnelser: $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ og $D_1 f(x)$.
- Sætning 1 (p.53). Hvis $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ er differentiabel $x \in A$, så eksisterer alle $k$ partielle afledede og $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\right)$.
- Sætning 2 (p.53). Hvis $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ har partielle afledede i en omegn af $x \in A$, og hvis disse er kontinuerte i $x$, så er $f$ differentiabel i $x$.

## 1.4 Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede

**Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede**

- $f(x, y) = \sin(2x + 3y)$. Vi har da

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \cos(2x+3y) \cdot 2 \\ f'_y(x,y) &= \cos(2x+3y) \cdot 3 \end{aligned}$$

- De nye funktioner $f'_x$ og $f'_y$ har selv partielle afledede:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= \left(f'_x\right)'_x(x,y) = -4\sin(2x+3y) \\ f''_{xy}(x,y) &= \left(f'_x\right)'_y(x,y) = -6\sin(2x+3y) \\ f''_{yx}(x,y) &= \left(f'_y\right)'_x(x,y) = -6\sin(2x+3y) \\ f''_{yy}(x,y) &= \left(f'_y\right)'_y(x,y) = -9\sin(2x+3y) \end{aligned}$$

## 1.5 Blandede afledede, Tangentplan

**Blandede afledede, Tangentplan**

- Mængden af funktioner med kontinuerte partielle afledede i $A$ op til og med $p$'te orden betegnes med $C^p(A)$.
- Sætning (p. 67). Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ være åben. Lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ og $f \in C^2(A)$. Så gælder for alle $x \in A$ og alle $i, j$ at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Hvis $f$ er differentiabel i $a \in A$ kaldes grafen for det lineære udtryk $f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a)$ for tangentplanen for $f$ i $(a, f(a))$.
- Når $k = 2$ er ligningen for tangentplanen i $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ altså

$$\begin{aligned} z &= f(a_1, a_2) + \nabla f(a_1, a_2) \cdot (x_1 - a_1, x_2 - a_2) \\ &= f(a_1, a_2) + f'_{x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2) \end{aligned}$$

## 1.6 Kædereglen

**Kædereglen**

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ og lad $(x, y) = (X(t), Y(t)), t \in I$, være parameterfremstilling for en kurve, der forløber i $A$.
- Lad $g : I \to \mathbb{R}$ være givet ved $g(t) = f(X(t), Y(t))$ for alle $t \in I$.
- Antag, at $X$ og $Y$ er differentiable i $t_0 \in I$ og at $f$ er differentiabel i $(x_0, y_0) = (X(t_0), Y(t_0))$ (der antages at være et indre punkt i $A$).
- Så gælder: $g$ er differentiabel i $t_0$ og $g'(t_0) = f'_x(x_0, y_0) X'(t_0) + f'_y(x_0, y_0) Y'(t_0)$.
- Anderledes skrevet: $g'(t_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (X'(t_0), Y'(t_0))$.
- Endnu en version: $\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dX}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dY}{dt}$ hvor det underforstås hvor de afledede skal evalueres.

## 1.7 Eksempler på brugen af kædereglen

**Eksempel på brugen af kædereglen**

- Lad $f(x, y) = \left(x + y^2\right) \ln x$ og $X(t) = \cos t, Y(t) = \sin t$.
- Lad $g(t) = f(X(t), Y(t))$ for $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- Da $X$ og $Y$ er differentiable overalt og $f$ er differentiabel i $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, er $g$ differentiabel i $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- Vi har $f'_x(x, y) = \ln x + \left(x + y^2\right)\frac{1}{x}$, $f'_y(x, y) = 2y \ln x$, $X'(t) = -\sin t$ og $Y'(t) = \cos t$.
- Så $g'(t) = f'_x(X(t), Y(t)) X'(t) + f'_y(X(t), Y(t)) Y'(t) = \left(\ln X(t) + \left(X(t) + Y(t)^2\right)\frac{1}{X(t)}\right) X'(t) + 2Y(t) \ln X(t) \cdot Y'(t) = -\left(\ln \cos t + \left(\cos t + \sin^2 t\right)\frac{1}{\cos t}\right) \sin t + 2 \sin t \cos t \ln \cos t$
- Flere eksempler i Maple-worksheet.

## 1.8 Bevis for kædereglen

**Bevis for kædereglen**

- $f$ er differentiabel i $(x_0, y_0)$ så der findes en funktion $\varepsilon$ defineret i en cirkelskive $K$ omkring $(0,0)$ og med $\varepsilon(h_1, h_2) \to 0$ for $h = (h_1, h_2) \to (0,0)$ så for $h \in K$:

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot h + \varepsilon(h) \|h\|$$

- Med $h = (X(t_0 + \Delta t) - X(t_0), Y(t_0 + \Delta t) - Y(t_0))$ fås nu $g(t_0 + \Delta t) - g(t_0) = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot h + \varepsilon(h) \|h\|$.
- Heraf følger

$$\frac{g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)}{\Delta t} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \frac{h}{\Delta t} + \varepsilon(h) \left\| \frac{h}{\Delta t} \right\| \frac{|\Delta t|}{\Delta t}$$

- Men $\frac{h}{\Delta t} = \frac{(X(t_0+\Delta t) - X(t_0), Y(t_0+\Delta t) - Y(t_0))}{\Delta t} \to (X'(t_0), Y'(t_0))$ for $\Delta t \to 0$.
- Da $\varepsilon(h) = \varepsilon(X(t_0 + \Delta t) - X(t_0), Y(t_0 + \Delta t) - Y(t_0)) \to 0$ for $\Delta t \to 0$, fås, at $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t_0+\Delta t) - g(t_0)}{\Delta t} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (X'(t_0), Y'(t_0))$.

## 1.9 Gradient og niveaukurve

**Gradient og niveaukurve**

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ være differentiabel i det indre punkt $(x_0, y_0) \in A$.
- Antag, at $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0,0)$.
- Niveaukurven for $f$ gennem $(x_0, y_0)$ er givet ved ligningen $f(x, y) = f(x_0, y_0)$. Med $k = f(x_0, y_0)$ altså $f(x, y) = k$.
- Antag, at $(X(t), Y(t)), t \in I$, er en parameterfremstilling for $f(x, y) = k$ med $(X(t_0), Y(t_0)) = (x_0, y_0)$ og at $X$ og $Y$ er differentiable i $t_0$ med $(X'(t_0), Y'(t_0)) \neq (0,0)$.
- Så gælder $f(X(t), Y(t)) = k$ for alle $t \in I$, og dermed $\frac{d}{dt} f(X(t), Y(t)) = 0$ for alle $t \in I$.
- Kædereglen giver så $0 = \frac{d}{dt} f(X(t), Y(t))\Big|_{t=t_0} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (X'(t_0), Y'(t_0))$.
- Dvs. at tangentvektoren $(X'(t_0), Y'(t_0))$ til niveaukurven er vinkelret på gradienten.
- Se illustration i Maple-worksheet.