DesignMat Uge 10
Funktion af flere variable III

Preben Alsholm

Efterår 2010

1 Kædereglen

1.1 Kædereglen I

Kædereglen I

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ og lad $(x, y) = (X(t), Y(t))$, $t \in I$, være parameterfremstilling for en kurve, der forløber i A.
- Lad $g : I \to \mathbb{R}$ være givet ved $g(t) = f(X(t), Y(t))$ for alle $t \in I$.
- Antag, at X og Y er differentiable i $t_0 \in I$ og at f er differentiabel i $(x_0, y_0) = (X(t_0), Y(t_0))$ (der antages at være et indre punkt i A).
- Så gælder: g er differentiabel i t_0 og $g'(t_0) = f'_x(x_0, y_0) X'(t_0) + f'_y(x_0, y_0) Y'(t_0)$.
- Anderledes skrevet: $g'(t_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (X'(t_0), Y'(t_0))$.
- Endnu en version: $\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dX}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dY}{dt}$ hvor det underforstås hvor de afledede skal evalueres.

1.2 Kædereglen II

Kædereglen II

- Betragt som ovenfor $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.
- Lad nu $(u, v) \mapsto (X(u, v), Y(u, v))$ være en afbildning af $B \subseteq \mathbb{R}^2$ over i A.
- Lad $g : B \to \mathbb{R}$ være givet ved $g(u, v) = f(X(u, v), Y(u, v))$ for alle $(u, v) \in B$.
- Antag, at X og Y har partielle afledede mht. u i $(u_0, v_0) \in B$ og at f er differentiabel i $(x_0, y_0) = (X(u_0, v_0), Y(u_0, v_0))$ (der antages at være et indre punkt i A).
- Så gælder: g har en partiel afledet mht. u i (u_0, v_0) og $g'_u(u_0, v_0) = f'_x(x_0, y_0) X'_u(u_0, v_0) + f'_y(x_0, y_0) Y'_u(u_0, v_0)$.

- Anderledes skrevet: $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial u}$.
- En tilsvarende sætning gælder om $\frac{\partial g}{\partial v}$.
- Bevis: Kæderegel II følger umiddelbart af Kæderegel I.

2 Taylorpolynomier for funktion af flere variable

2.1 Taylorpolynomium for funktion af én variabel

Taylorpolynomium for funktion af én variabel

- Lad f være n gange differentiabel i intervallet I og lad $x_0 \in I$. Polynomiet

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \end{aligned}$$

  kaldes det n'te Taylorpolynomium for f med udviklingspunkt x_0.

- Taylors formel: Lad f være $n+1$ gange differentiabel i intervallet I og lad $x_0 \in I$. For givet $x \in I$ findes et tal ξ mellem x_0 og x, så $f(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$.

2.2 Differentialoperatoren $D_h = h \cdot \nabla$ I

En differentialoperator I

- Vi indfører differentialoperatoren D_h ved $D_h = h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y}$, når $h = (h_1, h_2)$ er en fast vektor, der ikke afhænger af x, y.
- D_h opererer på funktioner af 2 variable på følgende måde $D_h f = h_1 \frac{\partial f}{\partial x} + h_2 \frac{\partial f}{\partial y} = h \cdot \nabla f$.
- Derfor skrives også $D_h = h \cdot \nabla$.
- Eksempel. Hvis $h = (3, -2)$, er $D_h = 3\frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\partial}{\partial y}$, så

$$D_h\left(x^3 + xy^2\right) = 3\left(3x^2 + y^2\right) - 2(2xy) = 9x^2 + 3y^2 - 4xy$$

2.3 Differentialoperatoren $D_h = h \cdot \nabla$ II

En differentialoperator II

- Videre fås $D_h^2\left(x^3 + xy^2\right) = D_h\left(D_h\left(x^3 + xy^2\right)\right) = D_h\left(9x^2 + 3y^2 - 4xy\right) = 3(18x - 4y) - 2(6y - 4x) = 62x - 24y$.

- Dette resultat kan også opnås ved først at udregne D_h^2:

$$D_h^2 = \left(3\frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = 9\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 12\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

- hvorefter vi udnytter, at $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^3 + xy^2\right) = 6x$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(x^3 + xy^2\right) = 2y$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x^3 + xy^2\right) = 2x$.
- Altså $D_h^2\left(x^3 + xy^2\right) = 9 \cdot 6x - 12 \cdot 2y + 4 \cdot 2x = 62x - 24y$.
- D_h^n kan findes ved hjælp af binomialformlen

$$D_h^n = \left(h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} h_1^k h_2^{n-k} \frac{\partial^n}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$$

2.4 Taylors sætning i 2 variable, generelt n

Taylors sætning i 2 variable, generelt n

- Lad $f \in C^{n+1}(A)$ hvor $A \subset \mathbb{R}^2$ er åben. Lad $a = (a_1, a_2) \in A$ og lad $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ være så lille, at punkterne $a + th, t \in [0, 1]$, alle ligger i A. Lad $x = (x_1, x_2) = a + h$ gælder, at

$$f(x) = f(a) + D_h f(a) + \frac{1}{2}D_h^2 f(a) + \frac{1}{3!}D_h^3 f(a) + \cdots + \frac{1}{n!}D_h^n f(a) + \frac{1}{(n+1)!}\left(D_h^{n+1} f\right)(a + \xi h)$$

- hvor $D_h = h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2} = h \cdot \nabla$ og $\xi \in]0, 1[$.
- Det 2. Taylorpolynomium for f er $P_2(x_1, x_2) =$
$f(a) + f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a)(x_2 - a_2) +$
$\frac{1}{2}(f''_{x_1 x_1}(a)(x_1 - a_1)^2 + 2f''_{x_1 x_2}(a)(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)$
$+ f''_{x_2 x_2}(a)(x_2 - a_2)^2)$

2.5 Bevis for Taylors sætning i to variable

Bevis for Taylors sætning i to variable

- Lad $g(t) = f(a + th)$. Så vil g opfylde $g \in C^{n+1}(I)$ i er åbent interval $I \supset [0, 1]$.
- Vi bruger Taylors formel for funktion af én variabel på g med udviklingspunkt 0.
- Kædereglen giver $g'(t) = f_{x_1}(a + th) h_1 + f_{x_2}(a + th) h_2 = (D_h f)(a + th)$.
- Videre fås $g''(t) = \frac{d}{dt}((D_h f)(a + th)) = [D_h(D_h f)](a + th) = \left(D_h^2 f\right)(a + th)$, idet resultatet fra før nu bruges på $D_h f$ i stedet for på f.
- Generelt: $g^{(k)}(t) = \left(D_h^k f\right)(a + th)$.
- Taylor: $g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(0) + \frac{1}{3!}g'''(0) + \cdots + \frac{1}{n!}g^{(n)}(0) + R_n$.
- hvor $R_n = \frac{1}{(n+1)!}g^{(n+1)}(\xi)$ og $\xi \in]0, 1[$. Hermed følger sætningen umiddelbart.

2.6 Eksempel 1

Eksempel 1

- Lad f være givet ved $f(x, y) = \sin(x + 3y) e^{-x^2}$. Vi finder det 2. Taylor-polynomium udfra $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- Vi har

$$\begin{aligned}
f'_x(x, y) &= e^{-x^2}(\cos(x + 3y) - 2x \sin(x + 3y)) \\
f'_y(x, y) &= 3e^{-x^2}\cos(x + 3y) \\
f''_{xx}(x, y) &= e^{-x^2}\left(\left(4x^2 - 3\right)\sin(x + 3y) - 4x\cos(x + 3y)\right) \\
f''_{xy}(x, y) &= -3e^{-x^2}(\sin(x + 3y) + 2x\cos(x + 3y)) \\
f''_{yy}(x, y) &= -9e^{-x^2}\sin(x + 3y)
\end{aligned}$$

- Så $f'_x\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 0, f'_y\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 0, f''_{xx}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 3, f''_{xy}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 3, f''_{yy}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 9$
- Altså har vi, idet også $f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = -1$, at

$$\begin{aligned}
P_2(x, y) &= -1 + \frac{1}{2}\left(3x^2 + 2 \cdot 3x\left(y - \frac{\pi}{2}\right) + 9\left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2\right) \\
&= -1 + \frac{3}{2}x^2 + 3x\left(y - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{9}{2}\left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

2.7 Taylors sætning i 2 variable med $n \leq 2$

Taylors sætning i 2 variable med
$n \leq 2$

- Bemærk, at $P_2(x)$ kan skrives

$$P_2(x) = f(a) + f'_{x_1}(a)h_1 + f'_{x_2}(a)h_2 + \frac{1}{2}h^T H(a)h$$

hvor $H(a)$ er *Hessematricen*:

$$H(a) = \begin{bmatrix} f''_{x_1x_1}(a) & f''_{x_1x_2}(a) \\ f''_{x_1x_2}(a) & f''_{x_2x_2}(a) \end{bmatrix}$$

- Tages $n = 1$ i Taylors sætning fås for $f \in C^2(A)$, at

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + D_h f(a) + \frac{1}{2}\left(D_h^2 f\right)(a + \xi h) = \\
&= f(a) + f'_{x_1}(a)h_1 + f'_{x_2}(a)h_2 + \frac{1}{2}h^T H(a + \xi h)h
\end{aligned}$$

hvor $\xi \in]0, 1[$.

2.8 Eksempel 2: Lokalt ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt ekstremum I

- Lad $a = (a_1, a_2)$. Antag, at grafen for f har vandret tangentplan i a, således at $f'_{x_1}(a) = f'_{x_2}(a) = 0$.
- Kunne f have et lokalt minimum i a?
- Vi udnytter, at

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'_{x_1}(a)h_1 + f'_{x_2}(a)h_2 + \frac{1}{2}h^T H(a + \xi h)\, h \\ &= f(a) + \frac{1}{2}h^T H(a + \xi h)\, h \end{aligned}$$

  hvor $\xi \in]0, 1[$.

- Altså har f lokalt minimum i a, netop hvis $h^T H(a + \xi h)\, h \geq 0$ for alle små h.
- Hvis $f \in C^2(A)$ og $h^T H(a)\, h > 0$ for alle $h \neq (0, 0)$ gælder $h^T H(a + \xi h)\, h \geq 0$ for alle små h.
- $h^T H(a)\, h > 0$ for alle $h \neq (0, 0)$ er tilfældet netop når egenværdierne for $H(a)$ begge er positive.

2.9 Eksempel 2: Lokalt ekstremum II

Eksempel 2: Lokalt ekstremum II

- I eksempel 1 fandt vi for $f(x, y) = \sin(x + 3y)\, e^{-x^2}$, at $f'_x\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 0$, $f'_y\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 0$. Så i punktet $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ har grafen for f vandret tangentplan. Punktet er et *stationært* punkt.
- Desuden fandt vi $f''_{xx}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 3$, $f''_{xy}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 3$, $f''_{yy}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 9$.
- Hessematricen $H\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ er givet ved

$$H\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} f''_{xx}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) & f''_{xy}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ f''_{xy}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) & f''_{yy}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

- Karakterpolynomiet er $\det(H - \lambda I) = \lambda^2 - 12\lambda + 18$.
- Egenværdierne for $H\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ er dermed $6 \pm 3\sqrt{2}$.
- Da begge er positive har f lokalt minimum i $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.