

Største- og mindsteværdi Uge 11

Preben Alsholm

Efterår 2010

1 Største- og mindsteværdi

1.1 Ekstremum for funktion af to variable: Definitioner

Ekstremum for funktion af flere variable: Definitioner

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ en reel funktion af n variable.
- Punktet $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$ kaldes et *egentligt lokalt minimumspunkt* for f , hvis $f(x) > f(a)$ for alle x i en omegn omkring a og med $x \neq a$.
- Analogt defineres *egentligt lokalt maksimumspunkt*. Fællesbetegnelse: *ekstremumspunkt*.
- Punktet a kaldes et *globalt minimumspunkt* for f , hvis $f(x) \geq f(a)$ for alle $x \in A$.
- Analogt defineres *globalt maksimumspunkt*.
- *Mindsteværdien* for f er værdien af f i et globalt minimumspunkt. *Størsteværdien* er værdien af f i et globalt maksimumspunkt.

1.2 Ekstremum for funktion af flere variable

Ekstremum for funktion af flere variable: Sætninger

- En kontinuert funktion antager på en lukket og begrænset mængde en største- og en mindsteværdi.
- Hvis f er differentiabel i det indre punkt a og hvis f har lokalt ekstremum i a , så gælder, at $\nabla f(a) = (0, 0, \dots, 0)$, dvs. a er et stationært punkt.
- Ekstremumspunkterne for f på mængden A (hvis der er nogen) findes blandt
 1. Stationære punkter for f .
 2. Punkter hvor f ikke har partielle afledede.
 3. Randpunkterne for A .

1.3 Randundersøgelse, Eksempel 1 og 2

Randundersøgelse, Eksempel 1 og 2

- I de to eksempler er der tale om en kontinuert funktion f på en lukket og begrænset mængde A .
- Vi ved derfor, at største- og mindsteværdi for f på A eksisterer.
- Vi skal "blot" finde disse værdier.
- Lad $f(x, y) = 2x^2y^2 - 2x^2 - y^4$. Vi finder største- og mindsteværdi på cirkelskiven $x^2 + y^2 \leq 9$ og på cirkelskiven $x^2 + y^2 \leq 1$.
- Hele undersøgelsen præsenteres i Maple-worksheet til denne uge.
- Lad $f(x, y) = (2x + y)e^{-xy}$. Vi finder største- og mindsteværdi på området givet ved ulighederne $y + 2x \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
- Hele undersøgelsen præsenteres i Maple-worksheet til denne uge.

1.4 Randundersøgelse, Eksempel 1 (men på åben cirkelskive)

Randundersøgelse, Eksempel 1 (men på åben cirkelskive)

- Lad f være kontinuert og lad A være en *ikke* lukket, men dog begrænset mængde.
- Hvis f kan udvides til en kontinuert funktion på \bar{A} , så har f på \bar{A} en største- og en mindsteværdi.
- Hvis størsteværdien *kun* antages på den del af randen, som ikke tilhører A , så har f ingen størsteværdi.
- Lad $f(x, y) = 2x^2y^2 - 2x^2 - y^4$. Både største- og mindsteværdi på cirkelskiven $x^2 + y^2 \leq 9$ antages kun på randen. Derfor har f hverken største- eller mindsteværdi på den åbne cirkelskive $x^2 + y^2 < 9$. Værdimængden er $] -81, \frac{46}{3} [$.
- På cirkelskiven $x^2 + y^2 \leq 1$ antages størsteværdien i $(0, 0)$, mens mindsteværdien antages kun på randen. Derfor har f ingen mindsteværdi på den åbne cirkelskive $x^2 + y^2 < 1$, men har en størsteværdi, nemlig $f(0, 0) = 0$. Værdimængden er $] -2, 0 [$.

1.5 Randundersøgelse, Eksempel 3 og 4

Randundersøgelse, Eksempel 3 og 4

- Lad f være kontinuert og lad A være en *ikke* lukket, men dog begrænset mængde.
- Hvis f ikke er opadtil begrænset på A , dvs. ikke opfylder nogen ulighed af formen $f(x, y) \leq C$ for alle $(x, y) \in A$, så har f ingen størsteværdi på A .

- Lad $f(x, y) = \frac{1}{1-(x^2+y^2)}$ for $x^2 + y^2 < 1$. f er ikke opadtil begrænset på cirkelskiven $x^2 + y^2 < 1$, så har ingen størsteværdi, men har mindsteværdien 1. Værdimængden er $[0, \infty[$.
- Betragt $f(x) = (1-x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ på intervallet $]0, 1]$. f er kontinuert og begrænset, men har hverken største eller mindsteværdi. f kan ikke udvides til en kontinuert funktion på $[0, 1]$, da $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ikke eksisterer. Værdimængden er $] -1, 1[$.

1.6 Randundersøgelse, Eksempel 5

Randundersøgelse, Eksempel 5

- Lad $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6z$.
- Bestem største- og mindsteværdi for f på kuglen $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.
- Ét stationært punkt: $(0, 0, 1)$. Værdi $f(0, 0, 1) = -3$.
- Randen af kuglen er kugleoverfladen givet ved $x^2 = 4 - (y^2 + z^2)$.
- På denne er $f(x, y, z) = g(y, z) = 4 + y^2 + 2z^2 - 6z$.
- Bestemmer største- og mindsteværdi for g på cirkelskiven $y^2 + z^2 \leq 4$.
- Stationært punkt for g er $(0, \frac{3}{2})$. Værdi $g(0, \frac{3}{2}) = -\frac{1}{2}$.
- Randen af cirkelskiven er cirklen givet ved $y^2 = 4 - z^2$.
- På cirklen er $g(y, z) = h(z) = z^2 - 6z + 8 = (z - 2)(z - 4)$.
- Største- og mindsteværdi for h på $[-2, 2]$ er $h(-2) = 24$ og $h(2) = 0$.
- Konklusion: Størsteværdi for f er $f(0, 0, -2) = h(-2) = 24$ og mindsteværdi er $f(0, 0, 1) = -3$.