Lokalt ekstremum Uge 12

Preben Alsholm

Efterår 2010

1 Lokalt ekstremum

1.1 Lokalt ekstremum for funktion af én variabel

Lokalt ekstremum for funktion af én variabel

- Lad x_0 være et stationært punkt for f. Antag, at $f''(x_0)$ eksisterer. Så gælder:
  1. Hvis $f''(x_0) < 0$, så er x_0 et egentligt lokalt maksimumspunkt for f.
  2. Hvis $f''(x_0) > 0$, så er x_0 et egentligt lokalt minimumspunkt for f.

- Bevis:
$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h)}{h}$$
- Så $f''(x_0) < 0$ betyder, at for $|h|$ lille nok gælder
$$\frac{f'(x_0+h)}{h} < \frac{1}{2} f''(x_0) < 0$$
- For $h > 0$ betyder dette, at $f'(x_0+h) < 0$
- og for $h < 0$ betyder det, at $f'(x_0+h) > 0$.
- Men så må x_0 være et maksimumspunkt.

1.2 Hessematricen I

Hessematricen I

- Lad f være en funktion af n variable. Antag, at f har partielle afledede af anden orden i punktet $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Hessematricen for f i punktet a er den matrix $H(a)$, hvis element (i, j) er
$$f''_{x_i x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$
- Er f en funktion af 2 variable er Hessematricen i punktet $a = (a_1, a_2)$ altså givet ved
$$H(a_1, a_2) = \begin{bmatrix} f''_{x_1 x_1}(a_1, a_2) & f''_{x_1 x_2}(a_1, a_2) \\ f''_{x_1 x_2}(a_1, a_2) & f''_{x_2 x_2}(a_1, a_2) \end{bmatrix}$$

1.3 Hessematricen II

Hessematricen II

- Er f en funktion af 3 variable er Hessematricen i punktet $a = (a_1, a_2, a_3)$ givet ved
$$H(a) = \begin{bmatrix} f''_{x_1x_1}(a) & f''_{x_1x_2}(a) & f''_{x_1x_3}(a) \\ f''_{x_1x_2}(a) & f''_{x_2x_2}(a) & f''_{x_2x_3}(a) \\ f''_{x_1x_3}(a) & f''_{x_2x_3}(a) & f''_{x_3x_3}(a) \end{bmatrix}$$

- Eksempel. Funktionen f givet ved $f(x, y) = x^2 - x^2y + 2y^2$ har partielle afledede
$$f'_x(x, y) = 2x - 2xy \text{ og } f'_y(x, y) = -x^2 + 4y$$

- Hessematricen i punktet (x, y) er
$$\begin{bmatrix} 2-2y & -2x \\ -2x & 4 \end{bmatrix}$$

1.4 Hessematricen III

Hessematricen III

- Lad f være en funktion af n variable med kontinuerte partielle afledede op til og med 2. orden i en omegn om punktet $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Antag, at a er et stationært punkt for f. Lad $H(a)$ være Hessematricen for f i a.

- Så gælder

  1. Hvis egenværdierne for $H(a)$ alle er positive, så er a et egentligt minimumspunkt.
  2. Hvis egenværdierne alle er negative, er a et egentligt maksimumspunkt.
  3. Hvis to af egenværdierne har forskellige fortegn, så er a et egentligt saddelpunkt.
  4. Hvis mindst én af egenværdierne er lig med nul og resten har samme fortegn, så må en nærmere undersøgelse foretages.

- a er et *egentligt* saddelpunkt, hvis der eksisterer en ret linie gennem a langs hvilken f har egentligt maksimum og en ret linie gennem a langs hvilken f har egentligt minimum.

1.5 Hessematricen IV

Hessematricen IV

- Beviset bygger på Taylors formel for funktion af flere variable (her 2):

$$\begin{aligned} & f(a+h) = f(a) + \nabla f(a) \cdot h + \frac{1}{2} D_h^2 (f)(\alpha + \xi h) \\ = \; & f(a) + f_{x_1}(a) h_1 + f_{x_2}(a) h_2 \\ & + \frac{1}{2} \left(f''_{x_1 x_1}(a + \xi h) h_1^2 + 2 f''_{x_1 x_2}(a + \xi h) h_1 h_2 + f''_{x_2 x_2}(a + \xi h) h_2^2 \right) \\ = \; & f(a) + f_{x_1}(a) h_1 + f_{x_2}(a) h_2 + \frac{1}{2} h^T H(a + \xi h) h \end{aligned}$$

- I et stationært punkt a fås dermed

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} h^T H(a + \xi h) h$$

- Det afgørende er dermed fortegnet for $\frac{1}{2} h^T H(a + \xi h) h$ for små h.
- Hvis $H(a)$ har udelukkende positive egenværdier, så er $h^T H(a) h > 0$ for alle h.
- Vi har dog ikke $H(a)$, men $H(a + \xi h)$.

1.6 Hessematricen V

Hessematricen V

- Med $e = \frac{h}{\|h\|}$ er $\|e\| = 1$ og vi finder af $f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} h^T H(a + \xi h) h$, at

$$\begin{aligned} \frac{2}{\|h\|^2} (f(a+h) - f(a)) &= e^T H(a + \xi h) e \\ &= e^T H(a) e + e^T (H(a + \xi h) - H(a)) e \end{aligned}$$

- Ved at vælge $\|h\|$ lille nok kan sidste led gøres mindre end et vilkårligt givet $\varepsilon > 0$.
- Vælg Q ortogonal og så $Q^T H(a) Q = \Lambda$ er diagonal.
- Så fås med $e = Qw$ at $e^T H(a) e = w^T Q^T H(a) Q w = w^T \Lambda w = \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2$.
- Hvis nu $\lambda_2 \geq \lambda_1 > 0$ fås dermed $e^T H(a) e \geq \lambda_1 \left(w_1^2 + w_2^2\right) = \lambda_1 \|w\|^2 = \lambda_1 \left\|Q^T e\right\|^2 = \lambda_1 \|e\|^2 = \lambda_1$.
- Derfor gælder for små h, at $h^T H(a + \xi h) h > 0$. Så a er et egentligt minimumspunkt.

1.7 Hessematricen VI

Hessematricen VI

- Hvis i stedet $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ fås tilsvarende $e^T H(a) e = \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 \leq \lambda_2 \left(w_1^2 + w_2^2\right) = \lambda_2 \|w\|^2 = \lambda_2$.
- Derfor gælder for små h, at $h^T H(a + \xi h) h < 0$. Så a er et egentligt maksimumspunkt.
- Hvis $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ lader vi e være en egenvektor med længde 1 hørende til egenværdien λ_1.
- Så fås $e^T H(a) e = \lambda_1$. Langs linien $x = a + se$ er $f(a+h) - f(a)$ dermed negativ for små værdier af s. Altså antager f et egentligt maksimum i a *langs denne linie.*
- Vælges e i stedet som en egenvektor med længde 1 hørende til egenværdien λ_2, så ses at f langs linien $x = a + se$ antager et egentligt minimum.
- Konklusionen er, at a er et (egentligt) saddelpunkt.

1.8 Eksempel

Eksempel

- $f(x, y) = x^2 - x^2 y + 2y^2$ fra tidligere. Stationære punkter er $(0, 0)$ og $(\pm 2, 1)$.
- Vi fandt tidligere $H(x, y) = \begin{bmatrix} 2 - 2y & -2x \\ -2x & 4 \end{bmatrix}$.
- Heraf fås

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad H(2,1) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$
$$H(-2,1) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

- Egenværdierne for $H(0,0)$ er åbenbart 2 og 4, altså positive, så $(0,0)$ er et egentligt lokalt minimumspunkt.
- $H(2,1)$ og $H(-2,1)$ har de samme egenværdier, nemlig $2 \pm 2\sqrt{5}$.Den ene er dermed positiv,den anden er negativ. Punkterne $(\pm 2, 1)$ er egentlige saddelpunkter.

1.9 Spor og determinant

Spor og determinant

- Lad $n \times n$-matricen A have egenværdierne $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Så gælder, at

$$\begin{aligned} \det(A) &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \\ Spor(A) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n \end{aligned}$$

- Let bevist for $n = 2$:

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

- Men også

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - Spor(A)\lambda + \det A \end{aligned}$$

- Resultatet følger ved sammenligning.

1.10 Spor og determinant II

Spor og determinant II

- Lad f være en funktion af to variable med kontinuerte partielle afledede op til og med 2. orden i en omegn om punktet (a, b). Antag, at (a, b) er et stationært punkt for f. Lad $H(a, b)$ være Hessematricen for f i (a, b). Så gælder

  1. Hvis $\det H(a, b) > 0$, så er (a, b) et egentligt ekstremumspunkt.
     (a) Hvis $Spor(H(a, b)) > 0$, så er (a, b) et egentligt minimumspunkt.
     (b) Hvis $Spor(H(a, b)) < 0$, så er (a, b) et egentligt maksimumspunkt.
  2. Hvis $\det H(a, b) < 0$, så er (a, b) et egentligt saddelpunkt.
  3. Hvis $\det H(a, b) = 0$ må en nærmere undersøgelse foretages.

- Eksempel: $H(2, 1) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$ fra tidligere.