

# DesignMat Uge 2

## Taylorpolynomier og Taylors formel

Preben Alsholm

Forår 2010

### Taylorpolynomier

- Definition af Taylorpolynomium
- Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
- Formlen for Taylorpolynomiet
- Eksempel: Eksponentialfunktionen
- Funktion givet ved simpel forskrift
- Funktion givet ved differentialligning

### Taylor's formel

- Lineariseringen
- Taylor's formel med Lagrange's restled
- Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I
- Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II
- Store O-notationen
- Lille o-notationen

# Definition af Taylorpolynomium

- ▶ Givet en funktion  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  og et udviklingspunkt  $x_0 \in I$ . Find et polynomium  $P_n$  af grad højst  $n$ , så  $f$  og  $P_n$  har samme nulte, første, anden, tredje,  $\dots$ ,  $n$ 'te afledede i punktet  $x_0$ .

Taylor's formel

Preben Alsholm

Taylorpolynomier

Definition af

Taylorpolynomium

Udledning af formlen for Taylorpolynomiet

Formlen for Taylorpolynomiet

Eksempel: Ekspponentialfunktionen

Funktion givet ved simpel forskrift

Funktion givet ved differentialligning

Taylor's formel

Lineariseringen

Taylor's formel med Lagrange's restled

Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I

Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II

Store O-notationen

Lille o-notationen

# Definition af Taylorpolynomium

- ▶ Givet en funktion  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  og et udviklingspunkt  $x_0 \in I$ . Find et polynomium  $P_n$  af grad højst  $n$ , så  $f$  og  $P_n$  har samme nulte, første, anden, tredje,  $\dots$ ,  $n$ 'te afledede i punktet  $x_0$ .
- ▶  $P_n$  skal så opfylde ligningerne

$$P_n(x_0) = f(x_0)$$

$$P_n'(x_0) = f'(x_0)$$

$$P_n''(x_0) = f''(x_0)$$

$$\vdots$$

$$P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

## Taylorpolynomier

### Definition af

### Taylorpolynomium

Udledning af formlen for Taylorpolynomiet

Formlen for Taylorpolynomiet

Eksempel: Ekspontentialfunktionen

Funktion givet ved simpel forskrift

Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen

Taylors formel med Lagrange's restled

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

Store O-notationen

Lille o-notationen

# Definition af Taylorpolynomium

- ▶ Givet en funktion  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  og et udviklingspunkt  $x_0 \in I$ . Find et polynomium  $P_n$  af grad højst  $n$ , så  $f$  og  $P_n$  har samme nulte, første, anden, tredje,  $\dots$ ,  $n$ 'te afledede i punktet  $x_0$ .
- ▶  $P_n$  skal så opfylde ligningerne

$$P_n(x_0) = f(x_0)$$

$$P_n'(x_0) = f'(x_0)$$

$$P_n''(x_0) = f''(x_0)$$

$$\vdots$$

$$P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

- ▶ Skriver vi  $P_n$  på formen

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + a_4(x - x_0)^4 + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

søger vi nu  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ .

## Taylorpolynomier

### Definition af Taylorpolynomium

Udledning af formelen for Taylorpolynomiet

Formlen for Taylorpolynomiet

Eksempel: Eksponentialfunktionen

Funktion givet ved simpel forskrift

Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen

Taylors formel med Lagrange's restled

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

Store O-notationen

Lille o-notationen

# Udledning af formlen for Taylorpolynomiet

- Vi ser med det samme, at  $a_0 = f(x_0)$ . Da

$$P'_n(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

## Taylorpolynomiet

Definition af

Taylorpolynomium

**Udledning af formlen for Taylorpolynomiet**

Formlen for Taylorpolynomiet

Eksempel: Eksponentialfunktionen

Funktion givet ved simpel forskrift

Funktion givet ved differentialligning

## Taylor's formel

Lineariseringen

Taylor's formel med Lagrange's restled

Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I

Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II

Store O-notationen

Lille o-notationen

# Udledning af formlen for Taylorpolynomiet

- Vi ser med det samme, at  $a_0 = f(x_0)$ . Da

$$P'_n(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

- fås, at  $a_1 = f'(x_0)$ . Da

$$P''_n(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3(x - x_0) + 4 \cdot 3 \cdot a_4(x - x_0)^2 + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}$$

## Taylorpolynomiet

Definition af

Taylorpolynomium

**Udledning af formlen for Taylorpolynomiet**

Formlen for Taylorpolynomiet

Eksempel: Eksponentialfunktionen

Funktion givet ved simpel forskrift

Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen

Taylors formel ved Lagrange's restled

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

Store O-notationen

Lille o-notationen

# Udledning af formlen for Taylorpolynomiet

- Vi ser med det samme, at  $a_0 = f(x_0)$ . Da

$$P'_n(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

- fås, at  $a_1 = f'(x_0)$ . Da

$$P''_n(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3(x - x_0) + 4 \cdot 3 \cdot a_4(x - x_0)^2 + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}$$

- fås  $a_2 = \frac{1}{2}f''(x_0)$ . Da

$$P'''_n(x) = 3 \cdot 2 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4(x - x_0) + \dots + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3}$$

fås, at  $a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3}f'''(x_0)$ .

## Taylorpolynomiet

Definition af

Taylorpolynomium

**Udledning af formlen for Taylorpolynomiet**

Formlen for Taylorpolynomiet

Eksempel: Eksponentialfunktionen

Funktion givet ved simpel forskrift

Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen

Taylors formel ved Lagrange's restled

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

Store O-notationen

Lille o-notationen

# Formlen for Taylorpolynomiet

- Generelt fås altså

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

således at

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
Udledning af formelen for Taylorpolynomiet

### Formlen for Taylorpolynomiet

Eksempel: Eksponentialfunktionen  
Funktion givet ved simpel forskrift  
Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
Taylors formel med Lagrange's restled  
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
Store O-notationen  
Lille o-notationen



# Formlen for Taylorpolynomiet

- Generelt fås altså

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

således at

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

- Dette kan også skrives

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k$$

idet vi definerer  $0! = 1$  og  $f^{(0)} = f$ .

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
Udledning af formelen for Taylorpolynomiet

### Formlen for Taylorpolynomiet

Eksempel: Eksponentialfunktionen  
Funktion givet ved simpel forskrift  
Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
Taylors formel med Lagrange's restled  
Udledning af fejlen ved Taylors formel I  
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
Store O-notationen  
Lille o-notationen

# Eksempel: Exponentialfunktioner

- ▶  $f(x) = e^x$  med udviklingspunkt 0, orden  $n$ . Vi har jo  $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$ .

Taylor's formel

Preben Alsholm

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
Formlen for Taylorpolynomiet

**Eksempel: Exponentialfunktioner**

Funktion givet ved simpel forskrift  
Funktion givet ved differentialligning

Taylor's formel

Lineariseringen  
Taylor's formel med Lagrange's restled  
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I  
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II  
Store O-notationen  
Lille o-notationen

# Eksempel: Exponentialfunktioner

- ▶  $f(x) = e^x$  med udviklingspunkt 0, orden  $n$ . Vi har jo  $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$ .
- ▶ Så  $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$  for alle  $k \geq 0$ .

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
Formlen for Taylorpolynomiet  
**Eksempel: Exponentialfunktioner**  
Funktion givet ved simpel forskrift  
Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
Taylors formel med Lagrange's restled  
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
Store O-notationen  
Lille o-notationen

# Eksempel: Exponentialfunktioner

- ▶  $f(x) = e^x$  med udviklingspunkt 0, orden  $n$ . Vi har jo  $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$ .
- ▶ Så  $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$  for alle  $k \geq 0$ .
- ▶ Hermed fås

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
 Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
 Formlen for Taylorpolynomiet

### Eksempel: Exponentialfunktionen

Funktion givet ved simpel forskrift  
 Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
 Taylors formel med Lagrange's restled  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
 Store O-notationen  
 Lille o-notationen

# Eksempel: Exponentialfunktioner

- ▶  $f(x) = e^x$  med udviklingspunkt 0, orden  $n$ . Vi har jo  $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$ .
- ▶ Så  $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$  for alle  $k \geq 0$ .
- ▶ Hermed fås

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

- ▶ Altså

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
 Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
 Formlen for Taylorpolynomiet  
**Eksempel: Eksponentialfunktionen**  
 Funktion givet ved simpel forskrift  
 Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
 Taylors formel med Lagrange's restled  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
 Store O-notationen  
 Lille o-notationen

# Eksempel: Exponentialfunktioner

- ▶  $f(x) = e^x$  med udviklingspunkt 0, orden  $n$ . Vi har jo  $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$ .
- ▶ Så  $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$  for alle  $k \geq 0$ .
- ▶ Hermed fås

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

- ▶ Altså

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$

- ▶ Dette kan også skrives

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}x^k$$

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
 Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
 Formlen for Taylorpolynomiet  
**Eksempel: Eksponentialfunktionen**  
 Funktion givet ved simpel forskrift  
 Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
 Taylors formel med Lagrange's restled  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
 Store O-notationen  
 Lille o-notationen

# Funktion givet ved simpel forskrift

- ▶  $f(x) = x \arctan x$  med udviklingspunkt 1, orden 2.

Taylor's formel

Preben Alsholm

Taylorpolynomier

Definition af

Taylorpolynomium

Udledning af formlen  
for Taylorpolynomiet

Formlen for

Taylorpolynomiet

Eksempel: Ekspone-  
ntialfunktionen

**Funktion givet ved  
simpel forskrift**

Funktion givet ved  
differentialligning

Taylor's formel

Lineariseringen

Taylor's formel med  
Lagrange's restled

Vurdering af fejlen  
ved Taylor's formel I

Vurdering af fejlen  
ved Taylor's formel II

Store O-notationen

Lille o-notationen

# Funktion givet ved simpel forskrift

- ▶  $f(x) = x \arctan x$  med udviklingspunkt 1, orden 2.
- ▶ Vi har

$$f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$$

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
 Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
 Formlen for Taylorpolynomiet  
 Eksempel: Eksponentialfunktionen  
**Funktion givet ved simpel forskrift**  
 Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
 Taylors formel med Lagrange's restled  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
 Store O-notationen  
 Lille o-notationen



# Funktion givet ved simpel forskrift

- ▶  $f(x) = x \arctan x$  med udviklingspunkt 1, orden 2.
- ▶ Vi har

$$f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$$

- ▶ Så  $f(1) = \frac{\pi}{4}$ ,  $f'(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ ,  $f''(1) = \frac{1}{2}$ .

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
 Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
 Formlen for Taylorpolynomiet  
 Eksempel: Eksponentialfunktionen  
**Funktion givet ved simpel forskrift**  
 Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
 Taylors formel med Lagrange's restled  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
 Store O-notationen  
 Lille o-notationen

# Funktion givet ved simpel forskrift

- ▶  $f(x) = x \arctan x$  med udviklingspunkt 1, orden 2.
- ▶ Vi har

$$f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$$

- ▶ Så  $f(1) = \frac{\pi}{4}$ ,  $f'(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ ,  $f''(1) = \frac{1}{2}$ .
- ▶ Hermed fås

$$\begin{aligned}
 P_2(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 \\
 &= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)(x-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(x-1)^2 \\
 &= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2
 \end{aligned}$$

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
 Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
 Formlen for Taylorpolynomiet  
 Eksempel: Eksponentialfunktionen  
**Funktion givet ved simpel forskrift**  
 Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
 Taylors formel med Lagrange's restled  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
 Store O-notationen  
 Lille o-notationen

# Funktion givet ved simpel forskrift

- ▶  $f(x) = x \arctan x$  med udviklingspunkt 1, orden 2.
- ▶ Vi har

$$f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$$

- ▶ Så  $f(1) = \frac{\pi}{4}$ ,  $f'(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ ,  $f''(1) = \frac{1}{2}$ .
- ▶ Hermed fås

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 \\ &= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)(x-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(x-1)^2 \\ &= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 \end{aligned}$$

- ▶ Maple

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet  
 Formlen for Taylorpolynomiet  
 Eksempel: Eksponentialfunktionen  
**Funktion givet ved simpel forskrift**  
 Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
 Taylors formel med Lagrange's restled  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
 Store O-notationen  
 Lille o-notationen

# Funktion givet ved differentialligning

- ▶ Find det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt  $\frac{\pi}{2}$  for løsningen til differentialligningen

$$x'(t) = \sin\left(t + x(t)^2\right) \text{ med } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Taylor's formel

Preben Alsholm

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
Formlen for Taylorpolynomiet  
Eksempel: Eksponentialfunktionen  
Funktion givet ved simpel forskrift  
**Funktion givet ved differentialligning**

Taylor's formel

Lineariseringen  
Taylor's formel med Lagrange's restled  
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I  
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II  
Store O-notationen  
Lille o-notationen

# Funktion givet ved differentialligning

- ▶ Find det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt  $\frac{\pi}{2}$  for løsningen til differentialligningen

$$x'(t) = \sin\left(t + x(t)^2\right) \text{ med } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

- ▶ Vi skal finde

$$P_2(t) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) + x'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}x''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
 Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
 Formlen for Taylorpolynomiet  
 Eksempel: Eksponentialfunktionen  
 Funktion givet ved simpel forskrift  
**Funktion givet ved differentialligning**

## Taylors formel

Lineariseringen  
 Taylors formel med Lagrange's restled  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
 Store O-notationen  
 Lille o-notationen

# Funktion givet ved differentialligning

- ▶ Find det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt  $\frac{\pi}{2}$  for løsningen til differentialligningen

$$x'(t) = \sin\left(t + x(t)^2\right) \text{ med } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

- ▶ Vi skal finde

$$P_2(t) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) + x'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}x''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

- ▶ Ved indsættelse af  $t = \frac{\pi}{2}$  i differentialligningen fås

$$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet  
 Formlen for Taylorpolynomiet  
 Eksempel: Eksponentialfunktionen  
 Funktion givet ved simpel forskrift  
 Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
 Taylors formel med Lagrange's restled  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
 Store O-notationen  
 Lille o-notationen

# Funktion givet ved differentialligning

- ▶ Find det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt  $\frac{\pi}{2}$  for løsningen til differentialligningen

$$x'(t) = \sin\left(t + x(t)^2\right) \text{ med } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

- ▶ Vi skal finde

$$P_2(t) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) + x'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}x''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

- ▶ Ved indsættelse af  $t = \frac{\pi}{2}$  i differentialligningen fås

$$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

- ▶ Ved differentiering af differentialligningen fås

$$x''(t) = \cos\left(t + x(t)^2\right) \cdot (1 + 2x(t)x'(t)).$$

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet  
 Formlen for Taylorpolynomiet  
 Eksempel: Eksponentialfunktionen  
 Funktion givet ved simpel forskrift  
**Funktion givet ved differentialligning**

## Taylors formel

Lineariseringen  
 Taylors formel med Lagrange's restled  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
 Store O-notationen  
 Lille o-notationen

# Funktion givet ved differentialligning

- ▶ Find det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt  $\frac{\pi}{2}$  for løsningen til differentialligningen

$$x'(t) = \sin\left(t + x(t)^2\right) \text{ med } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

- ▶ Vi skal finde

$$P_2(t) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) + x'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}x''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

- ▶ Ved indsættelse af  $t = \frac{\pi}{2}$  i differentialligningen fås

$$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

- ▶ Ved differentiation af differentialligningen fås

$$x''(t) = \cos\left(t + x(t)^2\right) \cdot (1 + 2x(t)x'(t)).$$

- ▶ Ved indsættelse af  $t = \frac{\pi}{2}$  heri fås

$$x''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) \cdot (1 + 2x\left(\frac{\pi}{2}\right)x'\left(\frac{\pi}{2}\right)) = 0.$$

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet  
 Formlen for Taylorpolynomiet  
 Eksempel: Eksponentialfunktionen  
 Funktion givet ved simpel forskrift  
 Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
 Taylors formel med Lagrange's restled  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
 Store O-notationen  
 Lille o-notationen



# Funktion givet ved differentialligning

- ▶ Find det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt  $\frac{\pi}{2}$  for løsningen til differentialligningen

$$x'(t) = \sin\left(t + x(t)^2\right) \text{ med } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

- ▶ Vi skal finde

$$P_2(t) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) + x'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}x''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

- ▶ Ved indsættelse af  $t = \frac{\pi}{2}$  i differentialligningen fås

$$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

- ▶ Ved differentiation af differentialligningen fås

$$x''(t) = \cos\left(t + x(t)^2\right) \cdot (1 + 2x(t)x'(t)).$$

- ▶ Ved indsættelse af  $t = \frac{\pi}{2}$  heri fås

$$x''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) \cdot (1 + 2x\left(\frac{\pi}{2}\right)x'\left(\frac{\pi}{2}\right)) = 0.$$

- ▶ **Altså fås**

$$P_2(t) = 0 + \left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 = t - \frac{\pi}{2}$$

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
 Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
 Formlen for Taylorpolynomiet  
 Eksempel: Eksponentialfunktionen  
 Funktion givet ved simpel forskrift  
**Funktion givet ved differentialligning**

## Taylors formel

Lineariseringen  
 Taylors formel med Lagrange's restled  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
 Store O-notationen  
 Lille o-notationen

# Funktion givet ved differentialligning

- ▶ Find det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt  $\frac{\pi}{2}$  for løsningen til differentialligningen

$$x'(t) = \sin\left(t + x(t)^2\right) \text{ med } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

- ▶ Vi skal finde

$$P_2(t) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) + x'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}x''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

- ▶ Ved indsættelse af  $t = \frac{\pi}{2}$  i differentialligningen fås

$$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

- ▶ Ved differentiation af differentialligningen fås

$$x''(t) = \cos\left(t + x(t)^2\right) \cdot (1 + 2x(t)x'(t)).$$

- ▶ Ved indsættelse af  $t = \frac{\pi}{2}$  heri fås

$$x''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) \cdot (1 + 2x\left(\frac{\pi}{2}\right)x'\left(\frac{\pi}{2}\right)) = 0.$$

- ▶ Altså fås

$$P_2(t) = 0 + \left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 = t - \frac{\pi}{2}$$

- ▶ som jo er det samme som det første Taylorpolynomium  $P_1(t)$ . Se Maple for  $P_3(t)$ .

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet  
 Formlen for Taylorpolynomiet  
 Eksempel: Eksponentialfunktionen  
 Funktion givet ved simpel forskrift  
 Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
 Taylors formel med Lagrange's restled  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
 Store O-notationen  
 Lille o-notationen

# Lineariseringen

- ▶ Definitionen på differentiability kan også formuleres således:

Taylor's formel

Preben Alsholm

Taylorpolynomier

Definition af  
Taylorpolynomium  
Udledning af formlen  
for Taylorpolynomiet  
Formlen for  
Taylorpolynomiet  
Eksempel: Ekspone-  
ntialfunktionen  
Funktion givet ved  
simpler forskrift  
Funktion givet ved  
differentialligning

Taylor's formel

**Lineariseringen**

Taylor's formel med  
Lagrange's restled  
Vurdering af fejlen  
ved Taylor's formel I  
Vurdering af fejlen  
ved Taylor's formel II  
Store O-notationen  
Lille o-notationen

# Lineariseringen

- ▶ Definitionen på differentiability kan også formuleres således:
- ▶  $f$  er *differentiable* i  $x_0$  med differentialkvotient  $a$ , hvis der findes en funktion  $\varepsilon$  defineret i et interval omkring 0, så

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + \varepsilon(h)h$$

og hvor  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  for  $h \rightarrow 0$ .

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
Formlen for Taylorpolynomiet  
Eksempel: Eksponentialfunktionen  
Funktion givet ved simpel forskrift  
Funktion givet ved differentialligning

## Taylor's formel

### Lineariseringen

Taylor's formel med Lagrange's restled  
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I  
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II  
Store O-notationen  
Lille o-notationen

# Lineariseringen

- ▶ Definitionen på differentiability kan også formuleres således:
- ▶  $f$  er *differentiabel* i  $x_0$  med differentialkvotient  $a$ , hvis der findes en funktion  $\varepsilon$  defineret i et interval omkring 0, så

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + \varepsilon(h)h$$

og hvor  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  for  $h \rightarrow 0$ .

- ▶ At  $f$  er differentiabel i  $x_0$  betyder altså, at  $f(x)$  approksimeres godt ved  $f(x_0) + a(x - x_0)$ , når  $|x - x_0|$  er lille.

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet  
 Formlen for Taylorpolynomiet  
 Eksempel: Eksponentialfunktionen  
 Funktion givet ved simpel forskrift  
 Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
 Taylors formel med Lagrange's restled  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
 Store O-notationen  
 Lille o-notationen

# Lineariseringen

- ▶ Definitionen på differentiability kan også formuleres således:
- ▶  $f$  er *differentiable* i  $x_0$  med differentialkvotient  $a$ , hvis der findes en funktion  $\varepsilon$  defineret i et interval omkring 0, så

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + \varepsilon(h)h$$

og hvor  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  for  $h \rightarrow 0$ .

- ▶ At  $f$  er differentiable i  $x_0$  betyder altså, at  $f(x)$  approksimeres godt ved  $f(x_0) + a(x - x_0)$ , når  $|x - x_0|$  er lille.
- ▶ Funktionen  $P_1(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$  kaldes for *lineariseringen* af  $f$  i  $x_0$ .

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
 Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
 Formlen for Taylorpolynomiet  
 Eksempel: Eksponentialfunktionen  
 Funktion givet ved simpel forskrift  
 Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
 Taylors formel med Lagrange's restled  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
 Store O-notationen  
 Lille o-notationen

# Lineariseringen

- ▶ Definitionen på differentiability kan også formuleres således:
- ▶  $f$  er *differentiabel* i  $x_0$  med differentialkvotient  $a$ , hvis der findes en funktion  $\varepsilon$  defineret i et interval omkring 0, så

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + \varepsilon(h)h$$

og hvor  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  for  $h \rightarrow 0$ .

- ▶ At  $f$  er differentiabel i  $x_0$  betyder altså, at  $f(x)$  approksimeres godt ved  $f(x_0) + a(x - x_0)$ , når  $|x - x_0|$  er lille.
- ▶ Funktionen  $P_1(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$  kaldes for *lineariseringen* af  $f$  i  $x_0$ .
- ▶ **Lineariseringen  $P_1$  er det første Taylorpolynomium for  $f$  med udviklingspunkt  $x_0$ .**

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet  
 Formlen for Taylorpolynomiet  
 Eksempel: Eksponentialfunktionen  
 Funktion givet ved simpel forskrift  
 Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

**Lineariseringen**  
 Taylors formel med Lagrange's restled  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
 Store O-notationen  
 Lille o-notationen

# Lineariseringen

- ▶ Definitionen på differentiability kan også formuleres således:
- ▶  $f$  er *differentiabel* i  $x_0$  med differentialkvotient  $a$ , hvis der findes en funktion  $\varepsilon$  defineret i et interval omkring 0, så

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + \varepsilon(h)h$$

og hvor  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  for  $h \rightarrow 0$ .

- ▶ At  $f$  er differentiabel i  $x_0$  betyder altså, at  $f(x)$  approksimeres godt ved  $f(x_0) + a(x - x_0)$ , når  $|x - x_0|$  er lille.
- ▶ Funktionen  $P_1(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$  kaldes for *lineariseringen* af  $f$  i  $x_0$ .
- ▶ Lineariseringen  $P_1$  er det første Taylorpolynomium for  $f$  med udviklingspunkt  $x_0$ .
- ▶ Grafen for  $P_1$  er tangenten til grafen for  $f$  i  $(x_0, f(x_0))$ .

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet  
 Formlen for Taylorpolynomiet  
 Eksempel: Eksponentialfunktionen  
 Funktion givet ved simpel forskrift  
 Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
 Taylors formel med Lagrange's restled  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
 Store O-notationen  
 Lille o-notationen



# Lineariseringen

- ▶ Definitionen på differentiability kan også formuleres således:
- ▶  $f$  er *differentiabel* i  $x_0$  med differentialkvotient  $a$ , hvis der findes en funktion  $\varepsilon$  defineret i et interval omkring 0, så

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + \varepsilon(h)h$$

og hvor  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  for  $h \rightarrow 0$ .

- ▶ At  $f$  er differentiabel i  $x_0$  betyder altså, at  $f(x)$  approksimeres godt ved  $f(x_0) + a(x - x_0)$ , når  $|x - x_0|$  er lille.
- ▶ Funktionen  $P_1(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$  kaldes for *lineariseringen* af  $f$  i  $x_0$ .
- ▶ Lineariseringen  $P_1$  er det første Taylorpolynomium for  $f$  med udviklingspunkt  $x_0$ .
- ▶ Grafen for  $P_1$  er tangenten til grafen for  $f$  i  $(x_0, f(x_0))$ .
- ▶ Hvor meget smider vi væk, når vi erstatte  $f(x)$  med  $P_1(x)$ ?

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
 Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
 Formlen for Taylorpolynomiet  
 Eksempel: Eksponentialfunktionen  
 Funktion givet ved simpel forskrift  
 Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
 Taylors formel med Lagrange's restled  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
 Store O-notationen  
 Lille o-notationen

# Taylor's formel med Lagrange's restled

Taylor's formel

Preben Alsholm

- ▶ Hvad er den fejl man begår ved at erstatte en funktion  $f$  med dens Taylorpolynomium  $P_n$ ?

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
Formlen for Taylorpolynomiet  
Eksempel: Eksponentialfunktionen  
Funktion givet ved simpel forskrift  
Funktion givet ved differentialligning

Taylor's formel

Lineariseringen  
**Taylor's formel med Lagrange's restled**  
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I  
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II  
Store O-notationen  
Lille o-notationen

# Taylor's formel med Lagrange's restled

- ▶ Hvad er den fejl man begår ved at erstatte en funktion  $f$  med dens Taylorpolynomium  $P_n$ ?
- ▶ Taylor's formel: Lad  $f$  være  $n + 1$  gange differentiabel i intervallet  $I$  og lad  $x_0 \in I$ . For givet  $x \in I$  findes et tal  $\xi$  mellem  $x_0$  og  $x$ , så

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \\ &\quad \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
Formlen for Taylorpolynomiet  
Eksempel: Eksponentialfunktionen  
Funktion givet ved simpel forskrift  
Funktion givet ved differentialligning

## Taylor's formel

Lineariseringen  
**Taylor's formel med Lagrange's restled**  
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I  
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II  
Store O-notationen  
Lille o-notationen

# Taylor's formel med Lagrange's restled

- ▶ Hvad er den fejl man begår ved at erstatte en funktion  $f$  med dens Taylorpolynomium  $P_n$ ?
- ▶ Taylor's formel: Lad  $f$  være  $n + 1$  gange differentiabel i intervallet  $I$  og lad  $x_0 \in I$ . For givet  $x \in I$  findes et tal  $\xi$  mellem  $x_0$  og  $x$ , så

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \\ &\quad \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

- ▶ Altså  $f(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1} = P_n(x) + R_n(x)$ .

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
Formlen for Taylorpolynomiet  
Eksempel: Eksponentialfunktionen  
Funktion givet ved simpel forskrift  
Funktion givet ved differentialligning

## Taylor's formel

Lineariseringen  
Taylor's formel med Lagrange's restled  
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I  
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II  
Store O-notationen  
Lille o-notationen

# Taylors formel med Lagrange's restled

- ▶ Hvad er den fejl man begår ved at erstatte en funktion  $f$  med dens Taylorpolynomium  $P_n$ ?
- ▶ Taylors formel: Lad  $f$  være  $n + 1$  gange differentiabel i intervallet  $I$  og lad  $x_0 \in I$ . For givet  $x \in I$  findes et tal  $\xi$  mellem  $x_0$  og  $x$ , så

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \\
 &\quad \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \\
 &\quad + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}
 \end{aligned}$$

- ▶ Altså  $f(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1} = P_n(x) + R_n(x)$ .

- ▶ Vi beviser ikke sætningen.

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
 Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
 Formlen for Taylorpolynomiet  
 Eksempel: Eksponentialfunktionen  
 Funktion givet ved simpel forskrift  
 Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
 Taylors formel med Lagrange's restled  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
 Store O-notationen  
 Lille o-notationen

# Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

- Eksempel.  $f(x) = e^x$ , udviklingspunkt 0. Vi har
- $$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n.$$

Taylors formel

Preben Alsholm

Taylorpolynomier

Definition af  
Taylorpolynomium  
Udledning af formlen  
for Taylorpolynomiet  
Formlen for  
Taylorpolynomiet  
Eksempel: Ekspone-  
ntialfunktionen  
Funktion givet ved  
simpler forskrift  
Funktion givet ved  
differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen  
Taylors formel med  
Lagrange's restled  
**Vurdering af fejlen  
ved Taylors formel I**  
Vurdering af fejlen  
ved Taylors formel II  
Store O-notationen  
Lille o-notationen

# Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

- ▶ Eksempel.  $f(x) = e^x$ , udviklingspunkt 0. Vi har  $P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$ .
- ▶  $f^{(n+1)}(x) = e^x$ . Så

$$|e^x - P_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi} x^{n+1} \right| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
 Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
 Formlen for Taylorpolynomiet  
 Eksempel: Eksponentialfunktionen  
 Funktion givet ved simpel forskrift  
 Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
 Taylors formel med Lagrange's restled  
**Vurdering af fejlen ved Taylors formel I**  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
 Store O-notationen  
 Lille o-notationen

# Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

- ▶ Eksempel.  $f(x) = e^x$ , udviklingspunkt 0. Vi har  $P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$ .
- ▶  $f^{(n+1)}(x) = e^x$ . Så

$$|e^x - P_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi} x^{n+1} \right| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

- ▶ Bestem  $n$ , så  $|e^x - P_n(x)| \leq 10^{-5}$  for alle  $x \in [-0.1, 0.1]$ .

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
 Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
 Formlen for Taylorpolynomiet  
 Eksempel: Eksponentialfunktionen  
 Funktion givet ved simpel forskrift  
 Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
 Taylors formel med Lagrange's restled  
**Vurdering af fejlen ved Taylors formel I**  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
 Store O-notationen  
 Lille o-notationen



# Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

- ▶ Eksempel.  $f(x) = e^x$ , udviklingspunkt 0. Vi har  $P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$ .
- ▶  $f^{(n+1)}(x) = e^x$ . Så

$$|e^x - P_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi} x^{n+1} \right| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

- ▶ Bestem  $n$ , så  $|e^x - P_n(x)| \leq 10^{-5}$  for alle  $x \in [-0.1, 0.1]$ .
- ▶ I Taylors formel gælder så  $|\xi| \leq 0.1$  og dermed

$$\begin{aligned} |e^x - P_n(x)| &= \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{e^{0.1}}{(n+1)!} (0.1)^{n+1} \\ &\leq \frac{2}{(n+1)!} (0.1)^{n+1} \end{aligned}$$

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet  
 Formlen for Taylorpolynomiet  
 Eksempel: Eksponentialfunktionen  
 Funktion givet ved simpel forskrift  
 Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
 Taylors formel med Lagrange's restled  
**Vurdering af fejlen ved Taylors formel I**  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
 Store O-notationen  
 Lille o-notationen

# Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

- ▶ Eksempel.  $f(x) = e^x$ , udviklingspunkt 0. Vi har  $P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$ .
- ▶  $f^{(n+1)}(x) = e^x$ . Så

$$|e^x - P_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi} x^{n+1} \right| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

- ▶ Bestem  $n$ , så  $|e^x - P_n(x)| \leq 10^{-5}$  for alle  $x \in [-0.1, 0.1]$ .
- ▶ I Taylors formel gælder så  $|\xi| \leq 0.1$  og dermed

$$\begin{aligned} |e^x - P_n(x)| &= \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{e^{0.1}}{(n+1)!} (0.1)^{n+1} \\ &\leq \frac{2}{(n+1)!} (0.1)^{n+1} \end{aligned}$$

- ▶ Vi vælger nu  $n$ , så  $\frac{2}{(n+1)!} (0.1)^{n+1} \leq 10^{-5}$ .  $n = 3$  er nok, idet  $\frac{2}{4!} 10^{-4} = \frac{1}{12} 10^{-4} < 10^{-5}$ .

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet  
 Formlen for Taylorpolynomiet  
 Eksempel: Eksponentialfunktionen  
 Funktion givet ved simpel forskrift  
 Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
 Taylors formel med Lagrange's restled  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
 Store O-notationen  
 Lille o-notationen

# Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

- ▶ Lad  $f(x)$  for alle  $x$  være givet ved

$$f(x) = \int_0^x (1+t) \cos(t^3) dt$$

Taylors formel

Preben Alsholm

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
Formlen for Taylorpolynomiet  
Eksempel: Eksponentialfunktionen  
Funktion givet ved simpel forskrift  
Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen  
Taylors formel med Lagrange's restled  
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
**Vurdering af fejlen ved Taylors formel II**  
Store O-notationen  
Lille o-notationen

# Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

- ▶ Lad  $f(x)$  for alle  $x$  være givet ved

$$f(x) = \int_0^x (1+t) \cos(t^3) dt$$

- ▶ Vurdér den fejl, der begås ved at erstatte  $f(x)$  med dets 2. Taylorpolynomium  $P_2(x)$  med udviklingspunkt 0, når  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
Formlen for Taylorpolynomiet  
Eksempel: Eksponentialfunktionen  
Funktion givet ved simpel forskrift  
Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
Taylors formel med Lagrange's restled  
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
**Vurdering af fejlen ved Taylors formel II**  
Store O-notationen  
Lille o-notationen

# Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

- ▶ Lad  $f(x)$  for alle  $x$  være givet ved

$$f(x) = \int_0^x (1+t) \cos(t^3) dt$$

- ▶ Vurdér den fejl, der begås ved at erstatte  $f(x)$  med dets 2. Taylorpolynomium  $P_2(x)$  med udviklingspunkt 0, når  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .
- ▶ Vi finder

$$f'(x) = (1+x) \cos(x^3)$$

$$f''(x) = \cos(x^3) - (1+x) 3x^2 \sin(x^3)$$

$$f'''(x) = -6x(1+2x) \sin(x^3) - 9x^4(1+x) \cos(x^3)$$

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
 Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
 Formlen for Taylorpolynomiet  
 Eksempel: Eksponentialfunktionen  
 Funktion givet ved simpel forskrift  
 Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
 Taylors formel med Lagrange's restled  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
**Vurdering af fejlen ved Taylors formel II**  
 Store O-notationen  
 Lille o-notationen

# Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

- ▶ Lad  $f(x)$  for alle  $x$  være givet ved

$$f(x) = \int_0^x (1+t) \cos(t^3) dt$$

- ▶ Vurdér den fejl, der begås ved at erstatte  $f(x)$  med dets 2. Taylorpolynomium  $P_2(x)$  med udviklingspunkt 0, når  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .
- ▶ Vi finder

$$f'(x) = (1+x) \cos(x^3)$$

$$f''(x) = \cos(x^3) - (1+x) 3x^2 \sin(x^3)$$

$$f'''(x) = -6x(1+2x) \sin(x^3) - 9x^4(1+x) \cos(x^3)$$

- ▶ Heraf findes  $P_2(x) = x + \frac{1}{2}x^2$ .

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
 Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
 Formlen for Taylorpolynomiet  
 Eksempel: Eksponentialfunktionen  
 Funktion givet ved simpel forskrift  
 Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
 Taylors formel med Lagrange's restled  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
**Vurdering af fejlen ved Taylors formel II**  
 Store O-notationen  
 Lille o-notationen

# Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

- Lad  $f(x)$  for alle  $x$  være givet ved

$$f(x) = \int_0^x (1+t) \cos(t^3) dt$$

- Vurdér den fejl, der begås ved at erstatte  $f(x)$  med dets 2. Taylorpolynomium  $P_2(x)$  med udviklingspunkt 0, når  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .
- Vi finder

$$f'(x) = (1+x) \cos(x^3)$$

$$f''(x) = \cos(x^3) - (1+x) 3x^2 \sin(x^3)$$

$$f'''(x) = -6x(1+2x) \sin(x^3) - 9x^4(1+x) \cos(x^3)$$

- Heraf findes  $P_2(x) = x + \frac{1}{2}x^2$ .
- Vha. Maple findes, at  $|f'''(x)| \leq 1.59$  for  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .  
Altså fås

$$|f(x) - P_2(x)| \leq 1.59 \cdot \frac{1}{6} |x|^3 \leq 1.59 \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \simeq 0.033$$

Den faktiske maksimale fejl kan findes grafisk til 0.0008.

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
Formlen for Taylorpolynomiet  
Eksempel: Eksponentialfunktionen  
Funktion givet ved simpel forskrift  
Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
Taylors formel med Lagrange's restled  
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
Store O-notationen  
Lille o-notationen

# Store O-notationer

- ▶ Når Maplekommandoen `taylor(sin(x),x=0,4)`; som resultat giver  $x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$ , betyder der følgende:

Taylor's formel

Preben Alsholm

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
Formlen for Taylorpolynomiet  
Eksempel: Eksponentialfunktionen  
Funktion givet ved simpel forskrift  
Funktion givet ved differentialligning

Taylor's formel

Lineariseringen  
Taylor's formel med Lagrange's restled  
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I  
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II  
**Store O-notationen**  
Lille o-notationen



# Store O-notationen

- ▶ Når Maplekommandoen `taylor(sin(x),x=0,4)`; som resultat giver  $x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$ , betyder der følgende:
- ▶ Der findes en konstant  $K$ , så

$$\left| \sin x - \left( x - \frac{1}{6}x^3 \right) \right| \leq Kx^4$$

for alle  $x$  i et interval med 0 som indre punkt.

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
Formlen for Taylorpolynomiet  
Eksempel: Eksponentialfunktionen  
Funktion givet ved simpel forskrift  
Funktion givet ved differentialligning

## Taylor's formel

Lineariseringen  
Taylor's formel med Lagrange's restled  
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I  
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II  
**Store O-notationen**  
Lille o-notationen

# Store O-notationen

- ▶ Når Maplekommandoen  $\text{taylor}(\sin(x), x=0, 4)$ ; som resultat giver  $x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$ , betyder der følgende:
- ▶ Der findes en konstant  $K$ , så

$$\left| \sin x - \left( x - \frac{1}{6}x^3 \right) \right| \leq Kx^4$$

for alle  $x$  i et interval med 0 som indre punkt.

- ▶ Generelt betyder  $f(x) = O(u(x))$  for  $x \rightarrow a$ , at der findes en konstant  $K$ , så

$$|f(x)| \leq K|u(x)|$$

for alle  $x$  i et interval med  $a$  som indre punkt.

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
Formlen for Taylorpolynomiet  
Eksempel: Eksponentialfunktionen  
Funktion givet ved simpel forskrift  
Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
Taylors formel med Lagrange's restled  
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
Store O-notationen  
Lille o-notationen

# Store O-notationen

- ▶ Når Maplekommandoen  $\text{taylor}(\sin(x), x=0, 4)$ ; som resultat giver  $x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$ , betyder der følgende:
- ▶ Der findes en konstant  $K$ , så

$$\left| \sin x - \left( x - \frac{1}{6}x^3 \right) \right| \leq Kx^4$$

for alle  $x$  i et interval med 0 som indre punkt.

- ▶ Generelt betyder  $f(x) = O(u(x))$  for  $x \rightarrow a$ , at der findes en konstant  $K$ , så

$$|f(x)| \leq K|u(x)|$$

for alle  $x$  i et interval med  $a$  som indre punkt.

- ▶ Vi har eksempelvis:  $\sin x = O(x)$ ,  $\sin x = x + O(x^2)$ , men også  $\sin x = x + O(x^3)$  og den allerede viste.

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
Formlen for Taylorpolynomiet  
Eksempel: Eksponentialfunktionen  
Funktion givet ved simpel forskrift  
Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
Taylors formel med Lagrange's restled  
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
Store O-notationen  
Lille o-notationen

# Store O-notationen

- ▶ Når Maplekommandoen  $\text{taylor}(\sin(x), x=0, 4)$ ; som resultat giver  $x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$ , betyder der følgende:
- ▶ Der findes en konstant  $K$ , så

$$\left| \sin x - \left( x - \frac{1}{6}x^3 \right) \right| \leq Kx^4$$

for alle  $x$  i et interval med 0 som indre punkt.

- ▶ Generelt betyder  $f(x) = O(u(x))$  for  $x \rightarrow a$ , at der findes en konstant  $K$ , så

$$|f(x)| \leq K |u(x)|$$

for alle  $x$  i et interval med  $a$  som indre punkt.

- ▶ Vi har eksempelvis:  $\sin x = O(x)$ ,  $\sin x = x + O(x^2)$ , men også  $\sin x = x + O(x^3)$  og den allerede viste.
- ▶ I Taylor-sammenhæng kan  $O((x - x_0)^n)$  tolkes som led af orden  $n$  og højere.

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet  
 Formlen for Taylorpolynomiet  
 Eksempel: Eksponentialfunktionen  
 Funktion givet ved simpel forskrift  
 Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
 Taylors formel med Lagrange's restled  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
 Store O-notationen  
 Lille o-notationen

# Lille o-notationen

- Udsagnet  $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$  betyder, at

$$\frac{\sin x - \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)}{x^3} \rightarrow 0$$

for  $x \rightarrow 0$ .

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
Formlen for Taylorpolynomiet  
Eksempel: Eksponentialfunktionen  
Funktion givet ved simpel forskrift  
Funktion givet ved differentialligning

## Taylor's formel

Lineariseringen  
Taylor's formel med Lagrange's restled  
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I  
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II  
Store O-notationen  
**Lille o-notationen**

- Udsagnet  $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$  betyder, at

$$\frac{\sin x - \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)}{x^3} \rightarrow 0$$

for  $x \rightarrow 0$ .

- Generelt betyder  $f(x) = o(u(x))$  for  $x \rightarrow a$ , at

$$\frac{f(x)}{u(x)} \rightarrow 0$$

for  $x \rightarrow a$ .

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
Formlen for Taylorpolynomiet  
Eksempel: Eksponentialfunktionen  
Funktion givet ved simpel forskrift  
Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
Taylors formel med Lagrange's restled  
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
Store O-notationen  
Lille o-notationen

- ▶ Udsagnet  $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$  betyder, at

$$\frac{\sin x - \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)}{x^3} \rightarrow 0$$

for  $x \rightarrow 0$ .

- ▶ Generelt betyder  $f(x) = o(u(x))$  for  $x \rightarrow a$ , at

$$\frac{f(x)}{u(x)} \rightarrow 0$$

for  $x \rightarrow a$ .

- ▶ Hvis  $f(x) = O(x^4)$  for  $x \rightarrow 0$  så gælder også  $f(x) = o(x^3)$ .

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet  
Formlen for Taylorpolynomiet  
Eksempel: Eksponentialfunktionen  
Funktion givet ved simpel forskrift  
Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
Taylors formel med Lagrange's restled  
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
Store O-notationen  
Lille o-notationen

- ▶ Udsagnet  $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$  betyder, at

$$\frac{\sin x - \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)}{x^3} \rightarrow 0$$

for  $x \rightarrow 0$ .

- ▶ Generelt betyder  $f(x) = o(u(x))$  for  $x \rightarrow a$ , at

$$\frac{f(x)}{u(x)} \rightarrow 0$$

for  $x \rightarrow a$ .

- ▶ Hvis  $f(x) = O(x^4)$  for  $x \rightarrow 0$  så gælder også  $f(x) = o(x^3)$ .
- ▶ Den omvendte gælder ikke.

## Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium  
Udledning af formelen for Taylorpolynomiet  
Formlen for Taylorpolynomiet  
Eksempel: Eksponentialfunktionen  
Funktion givet ved simpel forskrift  
Funktion givet ved differentialligning

## Taylors formel

Lineariseringen  
Taylors formel med Lagrange's restled  
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I  
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II  
Store O-notationen  
Lille o-notationen