

# DesignMat

## Lineære ligningssystemer og Gauss-elimination

Preben Alsholm

Uge 3 Forår 2010

Lineære  
ligningssystemer og  
Gauss-elimination

Om talrummet  $\mathbb{R}^n$

Eksempel 1

Eksempel 1 (alternativ  
formulering)

Et generelt lineært  
ligningssystem

Struktursætningen

Koefficientmatrix,  
Totalmatrix

Tilladelige operationer

En tilladelig operation  
mere (men undgå  
den!)

Eksempel 2.

Gausselimination I

Eksempel 2.

Gausselimination II

Eksempel 2.

Gausselimination III

Eksempel 2.

Gausselimination IV

De 3 tilfælde

Rang af matrix

Antal og art af  
løsninger

Fuld rang. Kvadratisk  
ligningssystem

# Om talsæt bestående af $n$ tal

- ▶  $\mathbb{R}^n$  er blot mængden af talsæt, hver bestående af  $n$  tal:

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

# Om talsæt bestående af $n$ tal

- ▶  $\mathbb{R}^n$  er blot mængden af talsæt, hver bestående af  $n$  tal:

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

- ▶ Addition defineres ved

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) &= \\ (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)\end{aligned}$$

## Om talrummet $\mathbb{R}^n$

Eksempel 1

Eksempel 1 (alternativ formulering)

Et generelt lineært ligningssystem

Struktursætningen

Koefficientmatrix, Totalmatrix

Tilladelige operationer

En tilladelig operation mere (men undgå den!)

Eksempel 2.

Gausselimination I

Eksempel 2.

Gausselimination II

Eksempel 2.

Gausselimination III

Eksempel 2.

Gausselimination IV

De 3 tilfælde

Rang af matrix

Antal og art af løsninger

Fuld rang. Kvadratisk ligningssystem

# Om talsæt bestående af $n$ tal

- ▶  $\mathbb{R}^n$  er blot mængden af talsæt, hver bestående af  $n$  tal:

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

- ▶ Addition defineres ved

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

- ▶ Multiplikation med et tal  $k \in \mathbb{R}$

$$k(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)k = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$$

# Om talsæt bestående af $n$ tal

- ▶  $\mathbb{R}^n$  er blot mængden af talsæt, hver bestående af  $n$  tal:

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

- ▶ Addition defineres ved

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

- ▶ Multiplikation med et tal  $k \in \mathbb{R}$

$$k(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)k = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$$

- ▶ Jens Eisings bog bruger betegnelsen  $\underline{a}$  for  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Altså  $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

# Om talsæt bestående af $n$ tal

- ▶  $\mathbb{R}^n$  er blot mængden af talsæt, hver bestående af  $n$  tal:

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

- ▶ Addition defineres ved

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

- ▶ Multiplikation med et tal  $k \in \mathbb{R}$

$$k(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)k = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$$

- ▶ Jens Eisings bog bruger betegnelsen  $\underline{a}$  for  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Altså  $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ .
- ▶ Her vil vi blot skrive  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

# Om talsæt bestående af $n$ tal

- ▶  $\mathbb{R}^n$  er blot mængden af talsæt, hver bestående af  $n$  tal:

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

- ▶ Addition defineres ved

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

- ▶ Multiplikation med et tal  $k \in \mathbb{R}$

$$k(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)k = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$$

- ▶ Jens Eisings bog bruger betegnelsen  $\underline{a}$  for  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Altså  $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ .
- ▶ Her vil vi blot skrive  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ .
- ▶ Talsættet  $(0, 0, \dots, 0)$  kaldes nulelementet og betegnes af JE med  $\underline{0}$ , men vil her blot blive betegnet med  $0$ .

# Om talsæt bestående af $n$ tal

- ▶  $\mathbb{R}^n$  er blot mængden af talsæt, hver bestående af  $n$  tal:

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

- ▶ Addition defineres ved

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

- ▶ Multiplikation med et tal  $k \in \mathbb{R}$

$$k(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)k = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$$

- ▶ Jens Eisings bog bruger betegnelsen  $\underline{a}$  for  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Altså  $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ .
- ▶ Her vil vi blot skrive  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ .
- ▶ Talsættet  $(0, 0, \dots, 0)$  kaldes nulelementet og betegnes af JE med  $\underline{0}$ , men vil her blot blive betegnet med  $0$ .
- ▶ Det må så af sammenhængen fremgå, om der er tale om tallet  $0$  eller talsættet  $(0, 0, \dots, 0)$ .



# Eksempel 1

100g mælk	Komælk	Fåremælk	Gedemælk
Protein	3.2g	6.2g	3.8g
Kulhydrat	4.9g	5.0g	4.4g
Fedt	3.5g	8.9g	4.1g

# Eksempel 1

100g mælk	Komælk	Fåremælk	Gedemælk
Protein	3.2g	6.2g	3.8g
Kulhydrat	4.9g	5.0g	4.4g
Fedt	3.5g	8.9g	4.1g

- Kan man opnå en blanding, der pr. 100g indeholder 4g protein, 4.5g kulhydrat og 5g fedt?  
Brøkdeler: Komælk  $x$ , Fåremælk  $y$ , Gedemælk  $z$ ,  
Postevand  $w$ .

# Eksempel 1

100g mælk	Komælk	Fåremælk	Gedemælk
Protein	3.2g	6.2g	3.8g
Kulhydrat	4.9g	5.0g	4.4g
Fedt	3.5g	8.9g	4.1g

- ▶ Kan man opnå en blanding, der pr. 100g indeholder 4g protein, 4.5g kulhydrat og 5g fedt?  
Brøkdeler: Komælk  $x$ , Fåremælk  $y$ , Gedemælk  $z$ , Postevand  $w$ .
- ▶ Proteinmængden:  $3.2 \cdot x + 6.2 \cdot y + 3.8 \cdot z = 4$

# Eksempel 1

100g mælk	Komælk	Fåremælk	Gedemælk
Protein	3.2g	6.2g	3.8g
Kulhydrat	4.9g	5.0g	4.4g
Fedt	3.5g	8.9g	4.1g

- ▶ Kan man opnå en blanding, der pr. 100g indeholder 4g protein, 4.5g kulhydrat og 5g fedt?  
Brøkdeler: Komælk  $x$ , Fåremælk  $y$ , Gedemælk  $z$ ,  
Postevand  $w$ .
- ▶ Proteinmængden:  $3.2 \cdot x + 6.2 \cdot y + 3.8 \cdot z = 4$
- ▶ Kulhydratmængden:  $4.9 \cdot x + 5.0 \cdot y + 4.4 \cdot z = 4.5$

# Eksempel 1

100g mælk	Komælk	Fåremælk	Gedemælk
Protein	3.2g	6.2g	3.8g
Kulhydrat	4.9g	5.0g	4.4g
Fedt	3.5g	8.9g	4.1g

- ▶ Kan man opnå en blanding, der pr. 100g indeholder 4g protein, 4.5g kulhydrat og 5g fedt?  
Brøkdeler: Komælk  $x$ , Fåremælk  $y$ , Gedemælk  $z$ , Postevand  $w$ .
- ▶ Proteinmængden:  $3.2 \cdot x + 6.2 \cdot y + 3.8 \cdot z = 4$
- ▶ Kulhydratmængden:  $4.9 \cdot x + 5.0 \cdot y + 4.4 \cdot z = 4.5$
- ▶ Fedtmængden:  $3.5 \cdot x + 8.9 \cdot y + 4.1 \cdot z = 5$

# Eksempel 1

100g mælk	Komælk	Fåremælk	Gedemælk
Protein	3.2g	6.2g	3.8g
Kulhydrat	4.9g	5.0g	4.4g
Fedt	3.5g	8.9g	4.1g

- ▶ Kan man opnå en blanding, der pr. 100g indeholder 4g protein, 4.5g kulhydrat og 5g fedt?  
Brøkdeler: Komælk  $x$ , Fåremælk  $y$ , Gedemælk  $z$ , Postevand  $w$ .
- ▶ Proteinmængden:  $3.2 \cdot x + 6.2 \cdot y + 3.8 \cdot z = 4$
- ▶ Kulhydratmængden:  $4.9 \cdot x + 5.0 \cdot y + 4.4 \cdot z = 4.5$
- ▶ Fedtmængden:  $3.5 \cdot x + 8.9 \cdot y + 4.1 \cdot z = 5$
- ▶ **Summen skal være 1:  $x + y + z + w = 1$**

# Eksempel 1 (alternativ formulering)

Brøkd dele	Komælk	Fåremælk	Gedemælk	Postevand
Protein	0.032	0.062	0.038	0
Kulhydrat	0.049	0.050	0.044	0
Fedt	0.035	0.089	0.041	0
Vand	0.884	0.799	0.877	1

# Eksempel 1 (alternativ formulering)

Brøkdeler	Komælk	Fåremælk	Gedemælk	Postevand
Protein	0.032	0.062	0.038	0
Kulhydrat	0.049	0.050	0.044	0
Fedt	0.035	0.089	0.041	0
Vand	0.884	0.799	0.877	1

- Kan man opnå en blanding, der indeholder 4% protein, 4.5% kulhydrat, 5% fedt og 86.5% vand?  
Brøkdeler: Komælk  $x$ , Fåremælk  $y$ , Gedemælk  $z$ , Postevand  $w$ .



## Eksempel 1 (alternativ formulering)

Brøkdeler	Komælk	Fåremælk	Gedemælk	Postevand
Protein	0.032	0.062	0.038	0
Kulhydrat	0.049	0.050	0.044	0
Fedt	0.035	0.089	0.041	0
Vand	0.884	0.799	0.877	1

- Kan man opnå en blanding, der indeholder 4% protein, 4.5% kulhydrat, 5% fedt og 86.5% vand?

Brøkdeler: Komælk  $x$ , Fåremælk  $y$ , Gedemælk  $z$ ,  
Postevand  $w$ .

- **Proteinmængden:**

$$0.032 \cdot x + 0.062 \cdot y + 0.038 \cdot z = 0.04$$

## Eksempel 1 (alternativ formulering)

Brøkdeler	Komælk	Fåremælk	Gedemælk	Postevand
Protein	0.032	0.062	0.038	0
Kulhydrat	0.049	0.050	0.044	0
Fedt	0.035	0.089	0.041	0
Vand	0.884	0.799	0.877	1

- Kan man opnå en blanding, der indeholder 4% protein, 4.5% kulhydrat, 5% fedt og 86.5% vand?

Brøkdeler: Komælk  $x$ , Fåremælk  $y$ , Gedemælk  $z$ , Postevand  $w$ .

- Proteinmængden:

$$0.032 \cdot x + 0.062 \cdot y + 0.038 \cdot z = 0.04$$

- Kulhydratmængden:

$$0.049 \cdot x + 0.050 \cdot y + 0.044 \cdot z = 0.045$$

## Eksempel 1 (alternativ formulering)

Brøkdeler	Komælk	Fåremælk	Gedemælk	Postevand
Protein	0.032	0.062	0.038	0
Kulhydrat	0.049	0.050	0.044	0
Fedt	0.035	0.089	0.041	0
Vand	0.884	0.799	0.877	1

- ▶ Kan man opnå en blanding, der indeholder 4% protein, 4.5% kulhydrat, 5% fedt og 86.5% vand?

Brøkdeler: Komælk  $x$ , Fåremælk  $y$ , Gedemælk  $z$ ,  
Postevand  $w$ .

- ▶ Proteinmængden:

$$0.032 \cdot x + 0.062 \cdot y + 0.038 \cdot z = 0.04$$

- ▶ Kulhydratmængden:

$$0.049 \cdot x + 0.050 \cdot y + 0.044 \cdot z = 0.045$$

- ▶ Fedtmængden:  $0.035 \cdot x + 0.089 \cdot y + 0.041 \cdot z = 0.05$

## Eksempel 1 (alternativ formulering)

Brøkdeler	Komælk	Fåremælk	Gedemælk	Postevand
Protein	0.032	0.062	0.038	0
Kulhydrat	0.049	0.050	0.044	0
Fedt	0.035	0.089	0.041	0
Vand	0.884	0.799	0.877	1

- ▶ Kan man opnå en blanding, der indeholder 4% protein, 4.5% kulhydrat, 5% fedt og 86.5% vand?

Brøkdeler: Komælk  $x$ , Fåremælk  $y$ , Gedemælk  $z$ ,  
Postevand  $w$ .

- ▶ Proteinmængden:

$$0.032 \cdot x + 0.062 \cdot y + 0.038 \cdot z = 0.04$$

- ▶ Kulhydratmængden:

$$0.049 \cdot x + 0.050 \cdot y + 0.044 \cdot z = 0.045$$

- ▶ Fedtmængden:  $0.035 \cdot x + 0.089 \cdot y + 0.041 \cdot z = 0.05$

- ▶ Vandmængden:

$$0.884 \cdot x + 0.799 \cdot y + 0.877 \cdot z + 1 \cdot w = 0.865$$

# Et generelt lineært ligningssystem

- Et lineært ligningssystem:

$$\begin{array}{rcccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Om talrummet  $\mathbb{R}^n$

Eksempel 1

Eksempel 1 (alternativ  
formulering)

**Et generelt lineært  
ligningssystem**

Struktur sætningen

Koefficientmatrix,  
Totalmatrix

Tilladelige operationer

En tilladelig operation  
mere (men undgå  
den!)

Eksempel 2.

Gausselimination I

Eksempel 2.

Gausselimination II

Eksempel 2.

Gausselimination III

Eksempel 2.

Gausselimination IV

De 3 tilfælde

Rang af matrix

Antal og art af  
løsninger

Fuld rang. Kvadratisk  
ligningssystem

# Et generelt lineært ligningssystem

- ▶ Et lineært ligningssystem:

$$\begin{array}{rcccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- ▶ Koefficienterne er tallene  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ . De ubekendte er  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . På højresiden befinder sig tallene  $b_1, b_2, \dots, b_m$ .

# Et generelt lineært ligningssystem

- ▶ Et lineært ligningssystem:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- ▶ Koefficienterne er tallene  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ . De ubekendte er  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . På højresiden befinder sig tallene  $b_1, b_2, \dots, b_m$ .
- ▶ En løsning er et sæt af  $n$  tal, der indsat i stedet for  $x_1, x_2, \dots, x_n$  i ligningerne gør disse til sande udsagn af typen  $5 = 5, 7 = 7, -311 = -311$  eller  $0 = 0$ .

# Struktursætningen

- ▶ Et lineært ligningssystem kaldes *homogent*, hvis høresiderne består af nuller.



# Struktursætningen

- ▶ Et lineært ligningssystem kaldes *homogent*, hvis høresiderne består af nuller.
- ▶ Et homogent ligningssystem har altid mindst én løsning, nemlig nulløsningen: Den *trivielle* løsning  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0) = 0$ .

# Struktursætningen

- ▶ Et lineært ligningssystem kaldes *homogent*, hvis høresiderne består af nuller.
- ▶ Et homogent ligningssystem har altid mindst én løsning, nemlig nulløsningen: Den *trivielle* løsning  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0) = 0$ .
- ▶ Hvis  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  og  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  er løsninger til et homogent system, så er også  $x + y$  og  $kx$  (med  $k \in \mathbb{R}$ ) løsninger.

# Struktursætningen

- ▶ Et lineært ligningssystem kaldes *homogent*, hvis høresiderne består af nuller.
- ▶ Et homogent ligningssystem har altid mindst én løsning, nemlig nulløsningen: Den *trivielle* løsning  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0) = 0$ .
- ▶ Hvis  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  og  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  er løsninger til et homogent system, så er også  $x + y$  og  $kx$  (med  $k \in \mathbb{R}$ ) løsninger.

## Theorem

Lad  $\tilde{x}$  være en løsning til det inhomogene ligningssystem.  
Lad  $L_{hom}$  og  $L_{inhom}$  betegne løsningsmængderne for det homogene og det inhomogene system, henholdsvis. Så gælder, at  $L_{inhom} = \tilde{x} + L_{hom}$ .

# Struktursætningen

- ▶ Et lineært ligningssystem kaldes *homogent*, hvis høresiderne består af nuller.
- ▶ Et homogent ligningssystem har altid mindst én løsning, nemlig nulløsningen: Den *trivielle* løsning  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0) = 0$ .
- ▶ Hvis  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  og  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  er løsninger til et homogent system, så er også  $x + y$  og  $kx$  (med  $k \in \mathbb{R}$ ) løsninger.

## Theorem

Lad  $\tilde{x}$  være en løsning til det inhomogene ligningssystem.

Lad  $L_{hom}$  og  $L_{inhom}$  betegne løsningsmængderne for det homogene og det inhomogene system, henholdsvis. Så gælder, at  $L_{inhom} = \tilde{x} + L_{hom}$ .

- ▶ Hermed gælder: Hvis  $L_{hom} = \{0\}$ , så er  $L_{inhom} = \{\tilde{x}\}$ . Det inhomogene system har kun løsningen  $\tilde{x}$ .

# Koefficientmatrix, Totalmatrix

## ► Koefficientmatricen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

# Koefficientmatrix, Totalmatrix

## ► Koefficientmatrixen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

## ► Totalmatrixen (på engelsk: *the augmented matrix*)

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Lineære  
ligningssystemer og  
Gauss-elimination

Om talrummet  $\mathbb{R}^n$

Eksempel 1

Eksempel 1 (alternativ  
formulering)

Et generelt lineært  
ligningssystem

Struktursætningen

**Koefficientmatrix,  
Totalmatrix**

Tilladelige operationer

En tilladelig operation  
mere (men undgå  
den!)

Eksempel 2.

Gausselimination I

Eksempel 2.

Gausselimination II

Eksempel 2.

Gausselimination III

Eksempel 2.

Gausselimination IV

De 3 tilfælde

Rang af matrix

Antal og art af  
løsninger

Fuld rang. Kvadratisk  
ligningssystem

# Koefficientmatrix, Totalmatrix

- ▶ Koefficientmatrixen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- ▶ Totalmatrixen (på engelsk: *the augmented matrix*)

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

- ▶  $A$  er en  $m \times n$ -matrix, fordi  $A$  har  $m$  rækker og  $n$  søjler.  
 $T$  er en  $m \times (n + 1)$ -matrix, fordi  $T$  har  $m$  rækker og  $n + 1$  søjler.

# Koefficientmatrix, Totalmatrix

- ▶ Koefficientmatricen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- ▶ Totalmatricen (på engelsk: *the augmented matrix*)

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

- ▶  $A$  er en  $m \times n$ -matrix, fordi  $A$  har  $m$  rækker og  $n$  søjler.  
 $T$  er en  $m \times (n + 1)$ -matrix, fordi  $T$  har  $m$  rækker og  $n + 1$  søjler.

- ▶ Maple: Et tilfældigt valgt lineært ligningssystem.



# Tilladelige operationer

- ▶ Tilladte operationer på ligningerne:

Om talrummet  $\mathbb{R}^n$

Eksempel 1

Eksempel 1 (alternativ  
formulering)

Et generelt lineært  
ligningssystem

Struktursætningen

Koefficientmatrix,  
Totalmatrix

## Tilladelige operationer

En tilladelig operation  
mere (men undgå  
den!)

Eksempel 2.

Gausselimination I

Eksempel 2.

Gausselimination II

Eksempel 2.

Gausselimination III

Eksempel 2.

Gausselimination IV

De 3 tilfælde

Rang af matrix

Antal og art af  
løsninger

Fuld rang. Kvadratisk  
ligningssystem

# Tilladelige operationer

- ▶ Tilladte operationer på ligningerne:

## 1. Ombytning to ligninger.

# Tilladelige operationer

► Tilladte operationer på ligningerne:

1. Ombytning to ligninger.
2. Multiplikation af en ligning med et tal forskellig fra nul.

# Tilladelige operationer

► Tilladte operationer på ligningerne:

1. Ombytning to ligninger.
2. Multiplikation af en ligning med et tal forskellig fra nul.
3. Erstatning af ligning nr.  $i$  med summen af ligning  $i$  og et tal gange ligning  $j$ , når  $i \neq j$ .

# Tilladelige operationer

► Tilladte operationer på ligningerne:

1. Ombytning to ligninger.
2. Multiplikation af en ligning med et tal forskellig fra nul.
3. Erstatning af ligning nr.  $i$  med summen af ligning  $i$  og et tal gange ligning  $j$ , når  $i \neq j$ .

► Tilladte operationer på rækkerne i totalmatricen:

► Tilladte operationer på ligningerne:

1. Ombytning to ligninger.
2. Multiplikation af en ligning med et tal forskellig fra nul.
3. Erstatning af ligning nr.  $i$  med summen af ligning  $i$  og et tal gange ligning  $j$ , når  $i \neq j$ .

► Tilladte operationer på rækkerne i totalmatricen:

1.  $R_i \leftrightarrow R_j$

► Tilladte operationer på ligningerne:

1. Ombytning to ligninger.
2. Multiplikation af en ligning med et tal forskellig fra nul.
3. Erstatning af ligning nr.  $i$  med summen af ligning  $i$  og et tal gange ligning  $j$ , når  $i \neq j$ .

► Tilladte operationer på rækkerne i totalmatricen:

1.  $R_i \leftrightarrow R_j$
2.  $R_i := cR_i$  hvor  $c \neq 0$

► Tilladte operationer på ligningerne:

1. Ombytning to ligninger.
2. Multiplikation af en ligning med et tal forskellig fra nul.
3. Erstatning af ligning nr.  $i$  med summen af ligning  $i$  og et tal gange ligning  $j$ , når  $i \neq j$ .

► Tilladte operationer på rækkerne i totalmatricen:

1.  $R_i \leftrightarrow R_j$
2.  $R_i := cR_i$  hvor  $c \neq 0$
3.  $R_i := R_i + cR_j$  hvor  $i \neq j$



► Tilladte operationer på ligningerne:

1. Ombytning to ligninger.
2. Multiplikation af en ligning med et tal forskellig fra nul.
3. Erstatning af ligning nr.  $i$  med summen af ligning  $i$  og et tal gange ligning  $j$ , når  $i \neq j$ .

► Tilladte operationer på rækkerne i totalmatricen:

1.  $R_i \leftrightarrow R_j$
2.  $R_i := cR_i$  hvor  $c \neq 0$
3.  $R_i := R_i + cR_j$  hvor  $i \neq j$

► Maple: Illustration af de tilladte operationer.

# En tilladelig operation mere (men undgå den!)

## ► Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \\2x_1 + 7x_2 + 5x_3 &= 4 \\-3x_1 \quad \quad + x_3 &= 5\end{aligned}$$

# En tilladelig operation mere (men undgå den!)

- ▶ Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \\2x_1 + 7x_2 + 5x_3 &= 4 \\-3x_1 \quad \quad + x_3 &= 5\end{aligned}$$

- ▶ Det har naturligvis de samme løsninger som systemet

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_3 + 3x_2 &= 3 \\2x_1 + 5x_3 + 7x_2 &= 4 \\-3x_1 + x_3 &= 5\end{aligned}$$

# En tilladelig operation mere (men undgå den!)

- ▶ Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \\2x_1 + 7x_2 + 5x_3 &= 4 \\-3x_1 \quad \quad + x_3 &= 5\end{aligned}$$

- ▶ Det har naturligvis de samme løsninger som systemet

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_3 + 3x_2 &= 3 \\2x_1 + 5x_3 + 7x_2 &= 4 \\-3x_1 + x_3 &= 5\end{aligned}$$

- ▶ De tilsvarende totalmatricer har søjle 2 og 3 ombyttet:  
 $S_2 \leftrightarrow S_3$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 7 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

## En tilladelig operation mere (men undgå den!)

- ▶ Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \\2x_1 + 7x_2 + 5x_3 &= 4 \\-3x_1 \quad \quad + x_3 &= 5\end{aligned}$$

- ▶ Det har naturligvis de samme løsninger som systemet

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_3 + 3x_2 &= 3 \\2x_1 + 5x_3 + 7x_2 &= 4 \\-3x_1 + x_3 &= 5\end{aligned}$$

- ▶ De tilsvarende totalmatricer har søjle 2 og 3 ombyttet:  
 $S_2 \leftrightarrow S_3$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 7 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- ▶ Søjleombytninger foretages i bogen, men vi vil undgå dem.

Lineære  
ligningssystemer og  
Gauss-eliminationOm talrummet  $\mathbb{R}^n$ 

Eksempel 1

Eksempel 1 (alternativ  
formulering)Et generelt lineært  
ligningssystem

Strukturætningen

Koefficientmatrix,  
Totalmatrix

Tilladelige operationer

**En tilladelig operation  
mere (men undgå  
den!)**

Eksempel 2.

Gausselimination I

Eksempel 2.

Gausselimination II

Eksempel 2.

Gausselimination III

Eksempel 2.

Gausselimination IV

De 3 tilfælde

Rang af matrix

Antal og art af  
løsningerFuld rang. Kvadratisk  
ligningssystem

# Eksempel 2. Gausselimination I

## ► Systemet fra før

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$$

$$2x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 4$$

$$-3x_1 + x_3 = 5$$

## Eksempel 2. Gausselimination I

- ▶ Systemet fra før

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$$

$$2x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 4$$

$$-3x_1 + x_3 = 5$$

- ▶ har totalmatricen

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

## Eksempel 2. Gausselimination I

- ▶ Systemet fra før

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$$

$$2x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 4$$

$$-3x_1 + x_3 = 5$$

- ▶ har totalmatricen

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

- ▶ Vi vil ved rækkeoperationer bringe matricen på echelonform:

$$\begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & \# & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & \# \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lineære  
ligningssystemer og  
Gauss-eliminationOm talrummet  $\mathbb{R}^n$ 

Eksempel 1

Eksempel 1 (alternativ  
formulering)Et generelt lineært  
ligningssystem

Strukturætningen

Koefficientmatrix,  
Totalmatrix

Tilladelige operationer

En tilladelig operation  
mere (men undgå  
den!)**Eksempel 2.**  
Gausselimination I

Eksempel 2.

Gausselimination II

Eksempel 2.

Gausselimination III

Eksempel 2.

Gausselimination IV

De 3 tilfælde

Rang af matrix

Antal og art af  
løsningerFuld rang. Kvadratisk  
ligningssystem



## Eksempel 2. Gausselimination II

► Rækkeoperationen  $R_2 := R_2 - 2R_1$  giver

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

## Eksempel 2. Gausselimination II

- Rækkeoperationen  $R_2 := R_2 - 2R_1$  giver

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

- Rækkeoperationen  $R_3 := R_3 + 3R_1$  giver

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 9 & 7 & 14 \end{bmatrix}$$

## Eksempel 2. Gausselimination II

- Rækkeoperationen  $R_2 := R_2 - 2R_1$  giver

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

- Rækkeoperationen  $R_3 := R_3 + 3R_1$  giver

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 9 & 7 & 14 \end{bmatrix}$$

- Rækkeoperationen  $R_3 := R_3 - 9R_2$  giver nu matricen

på echelonform: 
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 32 \end{bmatrix}$$

## Eksempel 2. Gausselimination II

- ▶ Rækkeoperationen  $R_2 := R_2 - 2R_1$  giver

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

- ▶ Rækkeoperationen  $R_3 := R_3 + 3R_1$  giver

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 9 & 7 & 14 \end{bmatrix}$$

- ▶ Rækkeoperationen  $R_3 := R_3 - 9R_2$  giver nu matricen

på echelonform: 
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 32 \end{bmatrix}$$

- ▶ Rækkeoperationen  $R_3 := -\frac{1}{2}R_3$  giver en pænere

version: 
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -16 \end{bmatrix}$$

## Eksempel 2. Gausselimination III

- Det tilsvarende ligningssystem er

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_2 + x_3 = -2$$

$$x_3 = -16$$

## Eksempel 2. Gausselimination III

- ▶ Det tilsvarende ligningssystem er

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \\x_2 + x_3 &= -2 \\x_3 &= -16\end{aligned}$$

- ▶ Dette kan løses nedefra og op:

## Eksempel 2. Gausselimination III

- ▶ Det tilsvarende ligningssystem er

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \\x_2 + x_3 &= -2 \\x_3 &= -16\end{aligned}$$

- ▶ Dette kan løses nedefra og op:

1. Først findes  $x_3 = -16$

## Eksempel 2. Gausselimination III

- ▶ Det tilsvarende ligningssystem er

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \\x_2 + x_3 &= -2 \\x_3 &= -16\end{aligned}$$

- ▶ Dette kan løses nedefra og op:

1. Først findes  $x_3 = -16$
2. Derefter  $x_2 = -x_3 - 2 = 16 - 2 = 14$



## Eksempel 2. Gausselimination III

- ▶ Det tilsvarende ligningssystem er

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \\x_2 + x_3 &= -2 \\x_3 &= -16\end{aligned}$$

- ▶ Dette kan løses nedefra og op:

1. Først findes  $x_3 = -16$
2. Derefter  $x_2 = -x_3 - 2 = 16 - 2 = 14$
3. Til sidst  $x_1 = -3x_2 - 2x_3 + 3 = -42 + 32 + 3 = -7$

## Eksempel 2. Gausselimination III

- ▶ Det tilsvarende ligningssystem er

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \\x_2 + x_3 &= -2 \\x_3 &= -16\end{aligned}$$

- ▶ Dette kan løses nedefra og op:

1. Først findes  $x_3 = -16$
2. Derefter  $x_2 = -x_3 - 2 = 16 - 2 = 14$
3. Til sidst  $x_1 = -3x_2 - 2x_3 + 3 = -42 + 32 + 3 = -7$

- ▶ Løsningen er altså  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 14 \\ -16 \end{bmatrix}$

# Eksempel på Gausselimination IV

► Totalmatricen på echelonform var 
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -16 \end{bmatrix}$$

# Eksempel på Gausselimination IV

- ▶ Totalmatricen på echelonform var 
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -16 \end{bmatrix}$$

- ▶ Man kunne gå videre til reduceret echelonform:

Rækkeoperationerne  $R_2 := R_2 - R_3$  og  $R_1 := R_1 - 2R_3$

giver 
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -16 \end{bmatrix}$$

# Eksempel på Gausselimination IV

- ▶ Totalmatricen på echelonform var 
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -16 \end{bmatrix}$$

- ▶ Man kunne gå videre til reduceret echelonform:

Rækkeoperationerne  $R_2 := R_2 - R_3$  og  $R_1 := R_1 - 2R_3$

giver 
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -16 \end{bmatrix}$$

- ▶ Rækkeoperationen  $R_1 := R_1 - 3R_2$  giver

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -16 \end{bmatrix}$$

# Eksempel på Gausselimination IV

- ▶ Totalmatricen på echelonform var 
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -16 \end{bmatrix}$$

- ▶ Man kunne gå videre til reduceret echelonform:

Rækkeoperationerne  $R_2 := R_2 - R_3$  og  $R_1 := R_1 - 2R_3$

giver 
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -16 \end{bmatrix}$$

- ▶ Rækkeoperationen  $R_1 := R_1 - 3R_2$  giver

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -16 \end{bmatrix}$$

- ▶ Det tilsvarende ligningssystem er nu ekstremt simpelt:

$$x_1 = -7$$

$$x_2 = 14$$

$$x_3 = -16$$

# De 3 tilfælde

- ▶ I eksempel 2 var der præcis én løsning. Der er to andre muligheder. Eks. 3 og 4 i Maple.

# De 3 tilfælde

- ▶ I eksempel 2 var der præcis én løsning. Der er to andre muligheder. Eks. 3 og 4 i Maple.
- ▶ De 3 tilfælde kan illustreres ved følgende til echelonform reducerede totalmatricer:

$$\begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & \# & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & \# \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



# De 3 tilfælde

- ▶ I eksempel 2 var der præcis én løsning. Der er to andre muligheder. Eks. 3 og 4 i Maple.
- ▶ De 3 tilfælde kan illustreres ved følgende til echelonform reducerede totalmatricer:

$$\begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & \# & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & \# \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ Den første svarer til Eks. 2: Præcis én løsning. 3 pivoteringssøjler i koefficientmatricen.

# De 3 tilfælde

- ▶ I eksempel 2 var der præcis én løsning. Der er to andre muligheder. Eks. 3 og 4 i Maple.
- ▶ De 3 tilfælde kan illustreres ved følgende til echelonform reducerede totalmatricer:

$$\begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & \# & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & \# \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ Den første svarer til Eks. 2: Præcis én løsning. 3 *pivoteringssøjler* i koefficientmatricen.
- ▶ Den anden svarer til Eks. 3 (Maple): Ingen løsning. Her er 2 *pivoteringssøjler* i koefficientmatricen.

## De 3 tilfælde

- ▶ I eksempel 2 var der præcis én løsning. Der er to andre muligheder. Eks. 3 og 4 i Maple.
- ▶ De 3 tilfælde kan illustreres ved følgende til echelonform reducerede totalmatricer:

$$\begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & \# & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & \# \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ Den første svarer til Eks. 2: Præcis én løsning. 3 *pivoteringssøjler* i koefficientmatricen.
- ▶ Den anden svarer til Eks. 3 (Maple): Ingen løsning. Her er 2 *pivoteringssøjler* i koefficientmatricen.
- ▶ Den tredje svarer til Eks. 4 (Maple): Uendeligt mange løsninger. *Pivoteringssøjler* er søjle 1 og 3. Så  $x_1$  og  $x_3$  kan udtrykkes ved den *frie variable*  $x_2$ .

# Rang af matrix

- ▶ Definition. Rangen af en matrix er antallet af pivoteringsøjler.

# Rang af matrix

- ▶ Definition. Rang af en matrix er antallet af pivoteringssøjler.
- ▶ Således er rangen af matricerne  $T_1, T_2, T_3$

$$\begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & \# & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & \# \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Om talrummet  $\mathbb{R}^n$

Eksempel 1

Eksempel 1 (alternativ formulering)

Et generelt lineært ligningssystem

Strukturætningen

Koefficientmatrix, Totalmatrix

Tilladelige operationer

En tilladelig operation mere (men undgå den!)

Eksempel 2.

Gausselimination I

Eksempel 2.

Gausselimination II

Eksempel 2.

Gausselimination III

Eksempel 2.

Gausselimination IV

De 3 tilfælde

**Rang af matrix**

Antal og art af løsninger

Fuld rang. Kvadratisk ligningssystem

# Rang af matrix

- ▶ Definition. Rangenen af en matrix er antallet af pivoteringssøjler.
- ▶ Således er rangenen af matrixerne  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$

$$\begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & \# & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & \# \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ givet ved  $\rho(T_1) = 3$ ,  $\rho(T_2) = 3$ ,  $\rho(T_3) = 2$ .

# Rang af matrix

- ▶ Definition. Rang af en matrix er antallet af pivoteringssøjler.
- ▶ Således er rangen af matricerne  $T_1, T_2, T_3$

$$\begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & \# & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & \# \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ givet ved  $\rho(T_1) = 3, \rho(T_2) = 3, \rho(T_3) = 2$ .
- ▶ Rang af matricerne  $A_1, A_2, A_3$

$$\begin{bmatrix} \# & * & * \\ 0 & \# & * \\ 0 & 0 & \# \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * \\ 0 & 0 & \# \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * \\ 0 & 0 & \# \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Rang af matrix

- ▶ Definition. Rangenen af en matrix er antallet af pivoteringssøjler.
- ▶ Således er rangenen af matricerne  $T_1, T_2, T_3$

$$\begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & \# & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & \# \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ givet ved  $\rho(T_1) = 3, \rho(T_2) = 3, \rho(T_3) = 2$ .
- ▶ Rangenen af matricerne  $A_1, A_2, A_3$

$$\begin{bmatrix} \# & * & * \\ 0 & \# & * \\ 0 & 0 & \# \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * \\ 0 & 0 & \# \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * \\ 0 & 0 & \# \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ er  $\rho(A_1) = 3, \rho(A_2) = 2, \rho(A_3) = 2$ .



# Antal og art af løsninger

- ▶ Lad ligningssystemet bestå af  $m$  ligninger med  $n$  ubekendte. Koefficientmatrix  $A$ , totalmatrix  $T = [A|b]$ .

# Antal og art af løsninger

- ▶ Lad ligningssystemet bestå af  $m$  ligninger med  $n$  ubekendte. Koefficientmatrix  $A$ , totalmatrix  $T = [A|b]$ .
- ▶ Hvis  $\rho(T) > \rho(A)$ , så har systemet ingen løsninger.

# Antal og art af løsninger

- ▶ Lad ligningssystemet bestå af  $m$  ligninger med  $n$  ubekendte. Koefficientmatrix  $A$ , totalmatrix  $T = [A|b]$ .
- ▶ Hvis  $\rho(T) > \rho(A)$ , så har systemet ingen løsninger.
- ▶ Hvis  $\rho(T) = \rho(A) = n$ , så har systemet præcis én løsning.

# Antal og art af løsninger

- ▶ Lad ligningssystemet bestå af  $m$  ligninger med  $n$  ubekendte. Koefficientmatrix  $A$ , totalmatrix  $T = [A|b]$ .
- ▶ Hvis  $\rho(T) > \rho(A)$ , så har systemet ingen løsninger.
- ▶ Hvis  $\rho(T) = \rho(A) = n$ , så har systemet præcis én løsning.
- ▶ Hvis  $\rho(T) = \rho(A) = \rho < n$ , så har systemet uendeligt mange løsninger. Der er  $n - \rho$  frie variable.

# Antal og art af løsninger

- ▶ Lad ligningssystemet bestå af  $m$  ligninger med  $n$  ubekendte. Koefficientmatrix  $A$ , totalmatrix  $T = [A|b]$ .
- ▶ Hvis  $\rho(T) > \rho(A)$ , så har systemet ingen løsninger.
- ▶ Hvis  $\rho(T) = \rho(A) = n$ , så har systemet præcis én løsning.
- ▶ Hvis  $\rho(T) = \rho(A) = \rho < n$ , så har systemet uendeligt mange løsninger. Der er  $n - \rho$  frie variable.
- ▶ Hvis  $x_p$  er en partikulær løsning til det inhomogene system, så findes der  $n - \rho$  talsæt  $v_1, v_2, \dots, v_{n-\rho} \in \mathbb{R}^n$  så løsningerne kan skrives på formen

$$x = x_p + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_{n-\rho} v_{n-\rho}$$

hvor  $t_1, t_2, \dots, t_{n-\rho} \in \mathbb{R}$ .

# Antal og art af løsninger

- ▶ Lad ligningssystemet bestå af  $m$  ligninger med  $n$  ubekendte. Koefficientmatrix  $A$ , totalmatrix  $T = [A|b]$ .
- ▶ Hvis  $\rho(T) > \rho(A)$ , så har systemet ingen løsninger.
- ▶ Hvis  $\rho(T) = \rho(A) = n$ , så har systemet præcis én løsning.
- ▶ Hvis  $\rho(T) = \rho(A) = \rho < n$ , så har systemet uendeligt mange løsninger. Der er  $n - \rho$  frie variable.
- ▶ Hvis  $x_\rho$  er en partikulær løsning til det inhomogene system, så findes der  $n - \rho$  talsæt  $v_1, v_2, \dots, v_{n-\rho} \in \mathbb{R}^n$  så løsningerne kan skrives på formen

$$x = x_\rho + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_{n-\rho} v_{n-\rho}$$

hvor  $t_1, t_2, \dots, t_{n-\rho} \in \mathbb{R}$ .

- ▶  $x = t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_{n-\rho} v_{n-\rho}$ ,  $t_1, t_2, \dots, t_{n-\rho} \in \mathbb{R}$ , er den fuldstændige løsning til det homogene system.

# Fuld rang. Kvadratisk ligningssystem

- ▶ En matrix  $m \times n$  matrix  $A$  siges at have *fuld rang*, hvis rangen er så stor, som den kan blive, nemlig  $\rho(A) = \min(m, n)$ .

# Fuld rang. Kvadratisk ligningssystem

- ▶ En matrix  $m \times n$  matrix  $A$  siges at have *fuld rang*, hvis rangen er så stor, som den kan blive, nemlig  $\rho(A) = \min(m, n)$ .
- ▶ Ligningssystemet kaldes *kvadratisk*, hvis antal ligninger = antal ubekendte =  $n$ .



# Fuld rang. Kvadratisk ligningssystem

- ▶ En matrix  $m \times n$  matrix  $A$  siges at have *fuld rang*, hvis rangen er så stor, som den kan blive, nemlig  $\rho(A) = \min(m, n)$ .
- ▶ Ligningssystemet kaldes *kvadratisk*, hvis antal ligninger = antal ubekendte =  $n$ .
- ▶ Koefficientmatricen  $A$  er da en  $n \times n$  matrix, og kaldes også kvadratisk.

# Fuld rang. Kvadratisk ligningssystem

- ▶ En matrix  $m \times n$  matrix  $A$  siges at have *fuld rang*, hvis rangen er så stor, som den kan blive, nemlig  $\rho(A) = \min(m, n)$ .
- ▶ Ligningssystemet kaldes *kvadratisk*, hvis antal ligninger = antal ubekendte =  $n$ .
- ▶ Koefficientmatricen  $A$  er da en  $n \times n$  matrix, og kaldes også kvadratisk.
- ▶ En  $n \times n$  matrix  $A$  kaldes *regulær*, hvis  $\rho(A) = n$ .

# Fuld rang. Kvadratisk ligningssystem

- ▶ En matrix  $m \times n$  matrix  $A$  siges at have *fuld rang*, hvis rangen er så stor, som den kan blive, nemlig  $\rho(A) = \min(m, n)$ .
- ▶ Ligningssystemet kaldes *kvadratisk*, hvis antal ligninger = antal ubekendte =  $n$ .
- ▶ Koefficientmatricen  $A$  er da en  $n \times n$  matrix, og kaldes også kvadratisk.
- ▶ En  $n \times n$  matrix  $A$  kaldes *regulær*, hvis  $\rho(A) = n$ .
- ▶ Et kvadratisk ligningssystem har netop én løsning, hvis og kun hvis  $A$  er regulær.