

# DesignMat

## Kvadratiske matricer, invers matrix, determinant

Preben Alsholm

Uge 5 Forår 2010

Kvadratiske  
matricer, invers  
matrix,  
determinant

Invers matrix I  
Invers matrix II,  
Algoritmen  
Invers matrix II

Determinanter

Permutationer I  
Permutationer II  
Definition af  
determinant

Determinanter:  
Eksempler

Determinant af  
triangulær matrix

Rækkeoperationernes  
virkning på  
determinanten

Sætninger om  
determinanten

# Invers matrix I

- ▶ *Definition.* En  $n \times n$ -matrix  $A$  siges at være invertibel, hvis der findes en  $n \times n$ -matrix  $C$ , så

$$AC = CA = I$$

I bekræftende fald kaldes  $C$  en invers til  $A$ .

# Invers matrix I

- ▶ *Definition.* En  $n \times n$ -matrix  $A$  siges at være invertibel, hvis der findes en  $n \times n$ -matrix  $C$ , så

$$AC = CA = I$$

I bekræftende fald kaldes  $C$  en invers til  $A$ .

- ▶ Hvis kun  $AC = I$ , siger man, at  $A$  har en højreinvert  $C$ .

# Invers matrix I

- ▶ *Definition.* En  $n \times n$ -matrix  $A$  siges at være invertibel, hvis der findes en  $n \times n$ -matrix  $C$ , så

$$AC = CA = I$$

I bekræftende fald kaldes  $C$  en invers til  $A$ .

- ▶ Hvis kun  $AC = I$ , siger man, at  $A$  har en højreinvert  $C$ .
- ▶ Hvis kun  $CA = I$ , siger man, at  $A$  har en venstreinvert  $C$ .

# Invers matrix I

- ▶ *Definition.* En  $n \times n$ -matrix  $A$  siges at være invertibel, hvis der findes en  $n \times n$ -matrix  $C$ , så

$$AC = CA = I$$

I bekræftende fald kaldes  $C$  en invers til  $A$ .

- ▶ Hvis kun  $AC = I$ , siger man, at  $A$  har en højreinvert  $C$ .
- ▶ Hvis kun  $CA = I$ , siger man, at  $A$  har en venstreinvert  $C$ .
- ▶ Hvis  $A$  har en invers, er den entydigt bestemt: Antag, at  $AC_1 = I$  og  $C_2A = I$ . Så gælder

$$C_2 = C_2I = C_2(AC_1) = (C_2A)C_1 = IC_1 = C_1$$

# Invers matrix I

- ▶ *Definition.* En  $n \times n$ -matrix  $A$  siges at være invertibel, hvis der findes en  $n \times n$ -matrix  $C$ , så

$$AC = CA = I$$

I bekræftende fald kaldes  $C$  en invers til  $A$ .

- ▶ Hvis kun  $AC = I$ , siger man, at  $A$  har en højreinvert  $C$ .
- ▶ Hvis kun  $CA = I$ , siger man, at  $A$  har en venstreinvert  $C$ .
- ▶ Hvis  $A$  har en invers, er den entydigt bestemt: Antag, at  $AC_1 = I$  og  $C_2A = I$ . Så gælder

$$C_2 = C_2I = C_2(AC_1) = (C_2A)C_1 = IC_1 = C_1$$

- ▶ Den inverse af  $A$  betegnes med  $A^{-1}$ .

# Invers matrix I

- ▶ *Definition.* En  $n \times n$ -matrix  $A$  siges at være invertibel, hvis der findes en  $n \times n$ -matrix  $C$ , så

$$AC = CA = I$$

I bekræftende fald kaldes  $C$  en invers til  $A$ .

- ▶ Hvis kun  $AC = I$ , siger man, at  $A$  har en højreinvert  $C$ .
- ▶ Hvis kun  $CA = I$ , siger man, at  $A$  har en venstreinvert  $C$ .
- ▶ Hvis  $A$  har en invers, er den entydigt bestemt: Antag, at  $AC_1 = I$  og  $C_2A = I$ . Så gælder

$$C_2 = C_2I = C_2(AC_1) = (C_2A)C_1 = IC_1 = C_1$$

- ▶ Den inverse af  $A$  betegnes med  $A^{-1}$ .
- ▶ *Sætning.* *Matricen  $A$  er invertibel hvis og kun hvis  $A$  er regulær, dvs. har fuld rang. Matricen  $A^{-1}$  er entydigt bestemt som løsningen  $C$  til  $AC = I$ .*

# Invers matrix I

- ▶ *Definition.* En  $n \times n$ -matrix  $A$  siges at være invertibel, hvis der findes en  $n \times n$ -matrix  $C$ , så

$$AC = CA = I$$

I bekræftende fald kaldes  $C$  en invers til  $A$ .

- ▶ Hvis kun  $AC = I$ , siger man, at  $A$  har en højreinvert  $C$ .
- ▶ Hvis kun  $CA = I$ , siger man, at  $A$  har en venstreinvert  $C$ .
- ▶ Hvis  $A$  har en invers, er den entydigt bestemt: Antag, at  $AC_1 = I$  og  $C_2A = I$ . Så gælder

$$C_2 = C_2I = C_2(AC_1) = (C_2A)C_1 = IC_1 = C_1$$

- ▶ Den inverse af  $A$  betegnes med  $A^{-1}$ .
- ▶ *Sætning.* *Matricen  $A$  er invertibel hvis og kun hvis  $A$  er regulær, dvs. har fuld rang. Matricen  $A^{-1}$  er entydigt bestemt som løsningen  $C$  til  $AC = I$ .*
- ▶ **Maple.**



# Invers matrix II, Algoritmen

- ▶ Vi vil bestemme  $C$ , så  $AC = I$ .

# Invers matrix II, Algoritmen

- ▶ Vi vil bestemme  $C$ , så  $AC = I$ .
- ▶ Totalmatricen dermed  $[A \mid I]$ .

# Invers matrix II, Algoritmen

- ▶ Vi vil bestemme  $C$ , så  $AC = I$ .
- ▶ Totalmatricen dermed  $[A \mid I]$ .
- ▶  $AC = I$  har en løsning  $C$ , netop når  $A$  har fuld rang, og  $C$  findes ved Gauss-Jordan  $[A \mid I] \rightarrow [I \mid C]$ .

# Invers matrix II, Algoritmen

- ▶ Vi vil bestemme  $C$ , så  $AC = I$ .
- ▶ Totalmatricen dermed  $[A \mid I]$ .
- ▶  $AC = I$  har en løsning  $C$ , netop når  $A$  har fuld rang, og  $C$  findes ved Gauss-Jordan  $[A \mid I] \rightarrow [I \mid C]$ .
- ▶ Hermed har vi fundet en højreinvert  $C$ .

# Invers matrix II, Algoritmen

- ▶ Vi vil bestemme  $C$ , så  $AC = I$ .
- ▶ Totalmatricen dermed  $[A \mid I]$ .
- ▶  $AC = I$  har en løsning  $C$ , netop når  $A$  har fuld rang, og  $C$  findes ved Gauss-Jordan  $[A \mid I] \rightarrow [I \mid C]$ .
- ▶ Hermed har vi fundet en højreinvert  $C$ .

- ▶ Men så fås

$$A(CA - I) = ACA - A = (AC)A - A = A - A = 0$$

(nulmatricen).

# Invers matrix II, Algoritmen

- ▶ Vi vil bestemme  $C$ , så  $AC = I$ .
- ▶ Totalmatricen dermed  $[A \mid I]$ .
- ▶  $AC = I$  har en løsning  $C$ , netop når  $A$  har fuld rang, og  $C$  findes ved Gauss-Jordan  $[A \mid I] \rightarrow [I \mid C]$ .
- ▶ Hermed har vi fundet en højreinvert  $C$ .
- ▶ Men så fås
$$A(CA - I) = ACA - A = (AC)A - A = A - A = 0$$
(nulmatricen).
- ▶ Men af  $A(CA - I) = 0$  fås  $CA - I = 0$  da  $AX = 0$  kun har nulløsningen, når  $A$  har fuld rang. Altså  $CA = I$ .

- ▶ Vi vil bestemme  $C$ , så  $AC = I$ .
- ▶ Totalmatricen dermed  $[A \mid I]$ .
- ▶  $AC = I$  har en løsning  $C$ , netop når  $A$  har fuld rang, og  $C$  findes ved Gauss-Jordan  $[A \mid I] \rightarrow [I \mid C]$ .
- ▶ Hermed har vi fundet en højreinvert  $C$ .
- ▶ Men så fås
$$A(CA - I) = ACA - A = (AC)A - A = A - A = 0$$
(nulmatricen).
- ▶ Men af  $A(CA - I) = 0$  fås  $CA - I = 0$  da  $AX = 0$  kun har nulløsningen, når  $A$  har fuld rang. Altså  $CA = I$ .
- ▶ **Konklusion:** Når  $A$  har en højreinvert, så er denne også venstreinvert, og dermed er den invers, altså  $A^{-1}$ .

# Invers matrix II, Algoritmen

- ▶ Vi vil bestemme  $C$ , så  $AC = I$ .
- ▶ Totalmatricen dermed  $[A \mid I]$ .
- ▶  $AC = I$  har en løsning  $C$ , netop når  $A$  har fuld rang, og  $C$  findes ved Gauss-Jordan  $[A \mid I] \rightarrow [I \mid C]$ .
- ▶ Hermed har vi fundet en højreinvert  $C$ .
- ▶ Men så fås
$$A(CA - I) = ACA - A = (AC)A - A = A - A = 0$$
(nulmatricen).
- ▶ Men af  $A(CA - I) = 0$  fås  $CA - I = 0$  da  $AX = 0$  kun har nulløsningen, når  $A$  har fuld rang. Altså  $CA = I$ .
- ▶ Konklusion: Når  $A$  har en højreinvert, så er denne også venstreinvert, og dermed er den invers, altså  $A^{-1}$ .
- ▶ **Maple.**



# Invers matrix II

- ▶ Hvis  $A$  er invertibel, så er  $A^{-1}$  invertibel og  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

# Invers matrix II

- ▶ Hvis  $A$  er invertibel, så er  $A^{-1}$  invertibel og  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- ▶ Hvis  $A$  og  $B$  begge er invertible, så er  $AB$  invertibel og  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

# Invers matrix II

- ▶ Hvis  $A$  er invertibel, så er  $A^{-1}$  invertibel og  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- ▶ Hvis  $A$  og  $B$  begge er invertible, så er  $AB$  invertibel og  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- ▶ **Bevis:**

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

# Invers matrix II

- ▶ Hvis  $A$  er invertibel, så er  $A^{-1}$  invertibel og  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- ▶ Hvis  $A$  og  $B$  begge er invertible, så er  $AB$  invertibel og  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- ▶ Bevis:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

- ▶ Hvis  $A$  er invertibel, så er  $A^T$  invertibel og  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

- ▶ Hvis  $A$  er invertibel, så er  $A^{-1}$  invertibel og  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- ▶ Hvis  $A$  og  $B$  begge er invertible, så er  $AB$  invertibel og  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- ▶ Bevis:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

- ▶ Hvis  $A$  er invertibel, så er  $A^T$  invertibel og  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .
- ▶ Bevis:  $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$

- ▶ Hvis  $A$  er invertibel, så er  $A^{-1}$  invertibel og  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- ▶ Hvis  $A$  og  $B$  begge er invertible, så er  $AB$  invertibel og  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- ▶ Bevis:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

- ▶ Hvis  $A$  er invertibel, så er  $A^T$  invertibel og  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .
- ▶ Bevis:  $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$
- ▶ og  $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I$ .

# Permutationer I

- ▶ Definition. En bijektiv afbildning

$$P : \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

kaldes en *permutation* af tallene  $1, 2, 3, \dots, n$ .

# Permutationer I

- ▶ Definition. En bijektiv afbildning

$$P : \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

kaldes en *permutation* af tallene  $1, 2, 3, \dots, n$ .

- ▶ En permutation af tallene  $1, 2, 3, \dots, n$  kan opfattes som en omordning af tallene til ordenen  $P(1), P(2), P(3), \dots, P(n)$ .



# Permutationer I

- ▶ Definition. En bijektiv afbildning

$$P : \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

kaldes en *permutation* af tallene  $1, 2, 3, \dots, n$ .

- ▶ En permutation af tallene  $1, 2, 3, \dots, n$  kan opfattes som en omordning af tallene til ordenen

$$P(1), P(2), P(3), \dots, P(n).$$

- ▶ Eksempelvis er  $3, 5, 1, 2, 4$  en permutation af  $1, 2, 3, 4, 5$ . Her er funktionen  $P$  givet ved

$$P(1) = 3, P(2) = 5, P(3) = 1, P(4) = 2, P(5) = 4$$

# Permutationer I

- ▶ Definition. En bijektiv afbildning

$$P : \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

kaldes en *permutation* af tallene  $1, 2, 3, \dots, n$ .

- ▶ En permutation af tallene  $1, 2, 3, \dots, n$  kan opfattes som en omordning af tallene til ordenen

$$P(1), P(2), P(3), \dots, P(n).$$

- ▶ Eksempelvis er  $3, 5, 1, 2, 4$  en permutation af  $1, 2, 3, 4, 5$ . Her er funktionen  $P$  givet ved

$$P(1) = 3, P(2) = 5, P(3) = 1, P(4) = 2, P(5) = 4$$

- ▶ Den omvendte funktion  $P^{-1}$  er permutationen  $3, 4, 1, 5, 2$ .

# Permutationer I

- ▶ Definition. En bijektiv afbildning

$$P : \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

kaldes en *permutation* af tallene  $1, 2, 3, \dots, n$ .

- ▶ En permutation af tallene  $1, 2, 3, \dots, n$  kan opfattes som en omordning af tallene til ordenen

$$P(1), P(2), P(3), \dots, P(n).$$

- ▶ Eksempelvis er  $3, 5, 1, 2, 4$  en permutation af  $1, 2, 3, 4, 5$ . Her er funktionen  $P$  givet ved

$$P(1) = 3, P(2) = 5, P(3) = 1, P(4) = 2, P(5) = 4$$

- ▶ Den omvendte funktion  $P^{-1}$  er permutationen  $3, 4, 1, 5, 2$ .

- ▶ Med  $S_n$  betegner vi mængden af samtlige permutationer af tallene  $1, 2, 3, \dots, n$ .

# Permutationer I

- ▶ Definition. En bijektiv afbildning

$$P : \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

kaldes en *permutation* af tallene  $1, 2, 3, \dots, n$ .

- ▶ En permutation af tallene  $1, 2, 3, \dots, n$  kan opfattes som en omordning af tallene til ordenen

$$P(1), P(2), P(3), \dots, P(n).$$

- ▶ Eksempelvis er  $3, 5, 1, 2, 4$  en permutation af  $1, 2, 3, 4, 5$ . Her er funktionen  $P$  givet ved

$$P(1) = 3, P(2) = 5, P(3) = 1, P(4) = 2, P(5) = 4$$

- ▶ Den omvendte funktion  $P^{-1}$  er permutationen  $3, 4, 1, 5, 2$ .

- ▶ Med  $S_n$  betegner vi mængden af samtlige permutationer af tallene  $1, 2, 3, \dots, n$ .

- ▶  $S_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$ .  $S_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$ .

# Permutationer I

- ▶ Definition. En bijektiv afbildning

$$P : \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

kaldes en *permutation* af tallene  $1, 2, 3, \dots, n$ .

- ▶ En permutation af tallene  $1, 2, 3, \dots, n$  kan opfattes som en omordning af tallene til ordenen

$$P(1), P(2), P(3), \dots, P(n).$$

- ▶ Eksempelvis er  $3, 5, 1, 2, 4$  en permutation af  $1, 2, 3, 4, 5$ . Her er funktionen  $P$  givet ved

$$P(1) = 3, P(2) = 5, P(3) = 1, P(4) = 2, P(5) = 4$$

- ▶ Den omvendte funktion  $P^{-1}$  er permutationen  $3, 4, 1, 5, 2$ .

- ▶ Med  $S_n$  betegner vi mængden af samtlige permutationer af tallene  $1, 2, 3, \dots, n$ .

- ▶  $S_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$ .  $S_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$ .

- ▶ Der er  $n!$  medlemmer i  $S_n$ .

# Permutationer II

- ▶ Lad  $j_1, j_2, j_3, \dots, j_n$  være en permutation af  $1, 2, 3, \dots, n$ . Hvis  $p < q$ , men  $j_p > j_q$ , så kaldes talparret  $j_p, j_q$  en *inversion* indenfor permutationen.

# Permutationer II

- ▶ Lad  $j_1, j_2, j_3, \dots, j_n$  være en permutation af  $1, 2, 3, \dots, n$ . Hvis  $p < q$ , men  $j_p > j_q$ , så kaldes talparret  $j_p, j_q$  en *inversion* indenfor permutationen.
- ▶ Permutationen  $3, 5, 1, 2, 4$  indeholder inversionerne  $(3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2), (5, 4)$ . Altså 5 inversioner.

# Permutationer II

- ▶ Lad  $j_1, j_2, j_3, \dots, j_n$  være en permutation af  $1, 2, 3, \dots, n$ . Hvis  $p < q$ , men  $j_p > j_q$ , så kaldes talparret  $j_p, j_q$  en *inversion* indenfor permutationen.
- ▶ Permutationen  $3, 5, 1, 2, 4$  indeholder inversionerne  $(3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2), (5, 4)$ . Altså 5 inversioner.
- ▶ **Antallet af inversioner i en permutation betegnes  $I(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n)$ . Vi har altså  $I(3, 5, 1, 2, 4) = 5$ .**



# Permutationer II

- ▶ Lad  $j_1, j_2, j_3, \dots, j_n$  være en permutation af  $1, 2, 3, \dots, n$ . Hvis  $p < q$ , men  $j_p > j_q$ , så kaldes talparret  $j_p, j_q$  en *inversion* indenfor permutationen.
- ▶ Permutationen  $3, 5, 1, 2, 4$  indeholder inversionerne  $(3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2), (5, 4)$ . Altså 5 inversioner.
- ▶ Antallet af inversioner i en permutation betegnes  $I(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n)$ . Vi har altså  $I(3, 5, 1, 2, 4) = 5$ .
- ▶ En permutation kaldes *lige* eller *ulige*, hvis inversionsantallet er lige eller ulige, henholdsvis.

# Permutationer II

- ▶ Lad  $j_1, j_2, j_3, \dots, j_n$  være en permutation af  $1, 2, 3, \dots, n$ . Hvis  $p < q$ , men  $j_p > j_q$ , så kaldes talparret  $j_p, j_q$  en *inversion* indenfor permutationen.
- ▶ Permutationen  $3, 5, 1, 2, 4$  indeholder inversionerne  $(3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2), (5, 4)$ . Altså 5 inversioner.
- ▶ Antallet af inversioner i en permutation betegnes  $I(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n)$ . Vi har altså  $I(3, 5, 1, 2, 4) = 5$ .
- ▶ En permutation kaldes *lige* eller *ulige*, hvis inversionsantallet er lige eller ulige, henholdsvis.
- ▶ Fortegnet  $\text{sgn}(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n)$  for en permutation defineres som 1, hvis permutationen er lige, og  $-1$ , hvis den er ulige.

# Permutationer II

- ▶ Lad  $j_1, j_2, j_3, \dots, j_n$  være en permutation af  $1, 2, 3, \dots, n$ . Hvis  $p < q$ , men  $j_p > j_q$ , så kaldes talparret  $j_p, j_q$  en *inversion* indenfor permutationen.
- ▶ Permutationen  $3, 5, 1, 2, 4$  indeholder inversionerne  $(3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2), (5, 4)$ . Altså 5 inversioner.
- ▶ Antallet af inversioner i en permutation betegnes  $I(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n)$ . Vi har altså  $I(3, 5, 1, 2, 4) = 5$ .
- ▶ En permutation kaldes *lige* eller *ulige*, hvis inversionsantallet er lige eller ulige, henholdsvis.
- ▶ Fortegnet  $\text{sgn}(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n)$  for en permutation defineres som 1, hvis permutationen er lige, og  $-1$ , hvis den er ulige.
- ▶ **Lemma 3.1.** Ved ombytning af to elementer i en permutation skifter denne fortegn.

# Permutationer II

- ▶ Lad  $j_1, j_2, j_3, \dots, j_n$  være en permutation af  $1, 2, 3, \dots, n$ . Hvis  $p < q$ , men  $j_p > j_q$ , så kaldes talparret  $j_p, j_q$  en *inversion* indenfor permutationen.
- ▶ Permutationen  $3, 5, 1, 2, 4$  indeholder inversionerne  $(3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2), (5, 4)$ . Altså 5 inversioner.
- ▶ Antallet af inversioner i en permutation betegnes  $I(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n)$ . Vi har altså  $I(3, 5, 1, 2, 4) = 5$ .
- ▶ En permutation kaldes *lige* eller *ulige*, hvis inversionsantallet er lige eller ulige, henholdsvis.
- ▶ Fortegnet  $\text{sgn}(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n)$  for en permutation defineres som 1, hvis permutationen er lige, og  $-1$ , hvis den er ulige.
- ▶ Lemma 3.1. Ved ombytning af to elementer i en permutation skifter denne fortegn.
- ▶ Eksempelvis er  $\text{sgn}(3, 5, 1, 2, 4) = -1$ , men  $\text{sgn}(3, 2, 1, 5, 4) = 1$ .

# Definition af determinant

- Lad  $n \times n$ -matricen  $A$  være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

# Definition af determinant

- ▶ Lad  $n \times n$ -matricen  $A$  være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- ▶ Determinanten af  $A$  defineres ved en sum over alle permutationer i  $S_n$ :

$$\det A = \sum_{S_n} \operatorname{sgn}(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

# Definition af determinant

- ▶ Lad  $n \times n$ -matricen  $A$  være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- ▶ Determinanten af  $A$  defineres ved en sum over alle permutationer i  $S_n$ :

$$\det A = \sum_{S_n} \operatorname{sgn}(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

- ▶ Determinanten af en  $2 \times 2$ -matrix  $A$  findes dermed til

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(1, 2) a_{11} a_{22} + \operatorname{sgn}(2, 1) a_{12} a_{21} \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \end{aligned}$$

# Definition af determinant

- ▶ Lad  $n \times n$ -matricen  $A$  være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- ▶ Determinanten af  $A$  defineres ved en sum over alle permutationer i  $S_n$ :

$$\det A = \sum_{S_n} \operatorname{sgn}(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

- ▶ Determinanten af en  $2 \times 2$ -matrix  $A$  findes dermed til

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(1, 2) a_{11} a_{22} + \operatorname{sgn}(2, 1) a_{12} a_{21} \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \end{aligned}$$

- ▶ Heldigvis det vi kender fra gymnasiet.



# Determinanter: Eksempler

- Eksempel.  $S_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$ .

# Determinanter: Eksempler

- ▶ Eksempel.  $S_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$ .

- ▶ Med  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  fås determinanten  $|A|$  til

# Determinanter: Eksempler

- ▶ Eksempel.  $S_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$ .

- ▶ Med  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  fås determinanten  $|A|$  til

- ▶  $sgn(1, 2, 3) a_{11} a_{22} a_{33} + sgn(1, 3, 2) a_{11} a_{23} a_{32}$   
 $+ sgn(2, 1, 3) a_{12} a_{21} a_{33} + sgn(2, 3, 1) a_{12} a_{23} a_{31}$   
 $+ sgn(3, 1, 2) a_{13} a_{21} a_{32} + sgn(3, 2, 1) a_{13} a_{22} a_{31}$

# Determinanter: Eksempler

- ▶ Eksempel.  $S_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$ .

- ▶ Med  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  fås determinanten  $|A|$  til

- ▶  $\text{sgn}(1, 2, 3) a_{11} a_{22} a_{33} + \text{sgn}(1, 3, 2) a_{11} a_{23} a_{32}$   
 $+ \text{sgn}(2, 1, 3) a_{12} a_{21} a_{33} + \text{sgn}(2, 3, 1) a_{12} a_{23} a_{31}$   
 $+ \text{sgn}(3, 1, 2) a_{13} a_{21} a_{32} + \text{sgn}(3, 2, 1) a_{13} a_{22} a_{31}$

- ▶  $= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}$   
 $- a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31}$   
 $+ a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$

# Determinanter: Eksempler

- ▶ Eksempel.  $S_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$ .

- ▶ Med  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  fås determinanten  $|A|$  til

- ▶  $sgn(1, 2, 3) a_{11} a_{22} a_{33} + sgn(1, 3, 2) a_{11} a_{23} a_{32}$   
 $+ sgn(2, 1, 3) a_{12} a_{21} a_{33} + sgn(2, 3, 1) a_{12} a_{23} a_{31}$   
 $+ sgn(3, 1, 2) a_{13} a_{21} a_{32} + sgn(3, 2, 1) a_{13} a_{22} a_{31}$

- ▶  $= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}$   
 $- a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31}$   
 $+ a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$

- ▶  $= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} -$   
 $(a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{22} a_{31})$

# Determinanter: Eksempler

- ▶ Eksempel.  $S_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$ .

- ▶ Med  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  fås determinanten  $|A|$  til

- ▶  $sgn(1, 2, 3) a_{11} a_{22} a_{33} + sgn(1, 3, 2) a_{11} a_{23} a_{32}$   
 $+ sgn(2, 1, 3) a_{12} a_{21} a_{33} + sgn(2, 3, 1) a_{12} a_{23} a_{31}$   
 $+ sgn(3, 1, 2) a_{13} a_{21} a_{32} + sgn(3, 2, 1) a_{13} a_{22} a_{31}$

- ▶  $= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}$   
 $- a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31}$   
 $+ a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$

- ▶  $= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} -$   
 $(a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{22} a_{31})$

- ▶ Sarrus' regel.

# Determinanter: Eksempler

- ▶ Eksempel.  $S_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$ .

- ▶ Med  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  fås determinanten  $|A|$  til

- ▶  $sgn(1, 2, 3) a_{11} a_{22} a_{33} + sgn(1, 3, 2) a_{11} a_{23} a_{32}$   
 $+ sgn(2, 1, 3) a_{12} a_{21} a_{33} + sgn(2, 3, 1) a_{12} a_{23} a_{31}$   
 $+ sgn(3, 1, 2) a_{13} a_{21} a_{32} + sgn(3, 2, 1) a_{13} a_{22} a_{31}$

- ▶  $= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}$   
 $- a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31}$   
 $+ a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$

- ▶  $= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} -$   
 $(a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{22} a_{31})$

- ▶ Sarrus' regel.

- ▶ Maple-illustrationer af definitionen.

# Determinant af triangulær matrix

- ▶ Hvis  $n \times n$ -matricen  $A$  opfylder  $a_{ij} = 0$  for  $i > j$  dvs. har den specielle form

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

kaldes den *øvre triangulær*.



# Determinant af triangulær matrix

- ▶ Hvis  $n \times n$ -matricen  $A$  opfylder  $a_{ij} = 0$  for  $i > j$  dvs. har den specielle form

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

kaldes den *øvre triangulær*.

- ▶ Hvert led i summen  $\sum_{S_n} \text{sgn}(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$  indeholder et element fra hver række.

# Determinant af triangulær matrix

- ▶ Hvis  $n \times n$ -matricen  $A$  opfylder  $a_{ij} = 0$  for  $i > j$  dvs. har den specielle form

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

kaldes den *øvre triangulær*.

- ▶ Hvert led i summen  $\sum_{S_n} \operatorname{sgn}(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$  indeholder et element fra hver række.
- ▶ Det eneste led, der ikke giver nul er  $\operatorname{sgn}(1, 2, 3, \dots, n) a_{11} a_{22} \dots a_{nn} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ .

# Determinant af triangulær matrix

- ▶ Hvis  $n \times n$ -matricen  $A$  opfylder  $a_{ij} = 0$  for  $i > j$  dvs. har den specielle form

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

kaldes den *øvre triangulær*.

- ▶ Hvert led i summen  $\sum_{S_n} \operatorname{sgn}(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$  indeholder et element fra hver række.
- ▶ Det eneste led, der ikke giver nul er  $\operatorname{sgn}(1, 2, 3, \dots, n) a_{11} a_{22} \dots a_{nn} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ .
- ▶ **Altså har vi for en øvre (eller nedre) triangulær matrix, at  $\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ .**

# Rækkeoperationernes virkning på determinanten

- ▶  $R_i \longleftrightarrow R_j$  ( $i \neq j$ ) skifter fortegn på determinanten.

Kvadratiske  
matricer

Preben Alsholm

Kvadratiske  
matricer, invers  
matrix,  
determinant

Invers matrix I  
Invers matrix II,  
Algoritmen  
Invers matrix II

Determinanter

Permutationer I  
Permutationer II  
Definition af  
determinant

Determinanter:  
Eksempler

Determinant af  
triangulær matrix

**Rækkeoperationernes  
virkning på  
determinanten**

Sætninger om  
determinanten

# Rækkeoperationernes virkning på determinanten

- ▶  $R_i \longleftrightarrow R_j$  ( $i \neq j$ ) skifter fortegn på determinanten.
- ▶  $R_i := kR_i$  gør determinanten  $k$  gange større.

# Rækkeoperationernes virkning på determinanten

- ▶  $R_i \longleftrightarrow R_j$  ( $i \neq j$ ) skifter fortegn på determinanten.
- ▶  $R_i := kR_i$  gør determinanten  $k$  gange større.
- ▶  $R_i := R_i + kR_j$  ( $i \neq j$ ) ændrer ikke determinantens værdi.

# Rækkeoperationernes virkning på determinanten

- ▶  $R_i \longleftrightarrow R_j$  ( $i \neq j$ ) skifter fortegn på determinanten.
- ▶  $R_i := kR_i$  gør determinanten  $k$  gange større.
- ▶  $R_i := R_i + kR_j$  ( $i \neq j$ ) ændrer ikke determinantens værdi.

▶ Beregn determinanten  $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & 2 \end{vmatrix}$  ved brug af

Gauss-elimination:

# Rækkeoperationernes virkning på determinanten

- ▶  $R_i \longleftrightarrow R_j$  ( $i \neq j$ ) skifter fortegn på determinanten.
- ▶  $R_i := kR_i$  gør determinanten  $k$  gange større.
- ▶  $R_i := R_i + kR_j$  ( $i \neq j$ ) ændrer ikke determinantens værdi.

- ▶ Beregn determinanten  $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & 2 \end{vmatrix}$  ved brug af

Gauss-elimination:

- ▶ Operationen  $R_3 := R_3 - 3R_1$  og derefter  $R_3 := R_3 - 14R_2$  giver

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -14 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{vmatrix}$$



# Rækkeoperationernes virkning på determinanten

- ▶  $R_i \longleftrightarrow R_j$  ( $i \neq j$ ) skifter fortegn på determinanten.
- ▶  $R_i := kR_i$  gør determinanten  $k$  gange større.
- ▶  $R_i := R_i + kR_j$  ( $i \neq j$ ) ændrer ikke determinantens værdi.

- ▶ Beregn determinanten  $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & 2 \end{vmatrix}$  ved brug af

Gauss-elimination:

- ▶ Operationen  $R_3 := R_3 - 3R_1$  og derefter  $R_3 := R_3 - 14R_2$  giver

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -14 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{vmatrix}$$

- ▶  $= 2 \cdot (-1) \cdot 17 = -34.$

# Rækkeoperationernes virkning på determinanten

- ▶  $R_i \longleftrightarrow R_j$  ( $i \neq j$ ) skifter fortegn på determinanten.
- ▶  $R_i := kR_i$  gør determinanten  $k$  gange større.
- ▶  $R_i := R_i + kR_j$  ( $i \neq j$ ) ændrer ikke determinantens værdi.

- ▶ Beregn determinanten  $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & 2 \end{vmatrix}$  ved brug af

Gauss-elimination:

- ▶ Operationen  $R_3 := R_3 - 3R_1$  og derefter  $R_3 := R_3 - 14R_2$  giver

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -14 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{vmatrix}$$

- ▶  $= 2 \cdot (-1) \cdot 17 = -34$ .
- ▶ **Maple-illustrationer.**

# Sætninger om determinanten

- ▶ Sætning 3.9  $A$  er regulær, hvis og kun hvis  $\det A \neq 0$ .

# Sætninger om determinanten

- ▶ Sætning 3.9  $A$  er regulær, hvis og kun hvis  $\det A \neq 0$ .
- ▶ **Bevis.** Hvis  $B$  fremkommer af  $A$  ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at  $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$ .

# Sætninger om determinanten

- ▶ Sætning 3.9  $A$  er regulær, hvis og kun hvis  $\det A \neq 0$ .
- ▶ Bevis. Hvis  $B$  fremkommer af  $A$  ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at  $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$ .
- ▶  $A$  er regulær, hvis og kun hvis  $A$  er rækkeækvivalent med enhedsmatricen. Men  $\det I = 1 \neq 0$ .

# Sætninger om determinanten

- ▶ Sætning 3.9  $A$  er regulær, hvis og kun hvis  $\det A \neq 0$ .
- ▶ Bevis. Hvis  $B$  fremkommer af  $A$  ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at  $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$ .
- ▶  $A$  er regulær, hvis og kun hvis  $A$  er rækkeækvivalent med enhedsmatricen. Men  $\det I = 1 \neq 0$ .
- ▶ Sætning 3.10  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .

# Sætninger om determinanten

- ▶ Sætning 3.9  $A$  er regulær, hvis og kun hvis  $\det A \neq 0$ .
- ▶ Bevis. Hvis  $B$  fremkommer af  $A$  ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at  $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$ .
- ▶  $A$  er regulær, hvis og kun hvis  $A$  er rækkeækvivalent med enhedsmatricen. Men  $\det I = 1 \neq 0$ .
- ▶ Sætning 3.10  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ .
- ▶ **Bevis. Hvis  $AB$  er invertibel, så er  $A$  også, idet  $(AB)C = I$  jo medfører, at  $BC$  er invers til  $A$ .**

# Sætninger om determinanten

- ▶ Sætning 3.9  $A$  er regulær, hvis og kun hvis  $\det A \neq 0$ .
- ▶ Bevis. Hvis  $B$  fremkommer af  $A$  ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at  $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$ .
- ▶  $A$  er regulær, hvis og kun hvis  $A$  er rækkeækvivalent med enhedsmatricen. Men  $\det I = 1 \neq 0$ .
- ▶ Sætning 3.10  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .
- ▶ Bevis. Hvis  $AB$  er invertibel, så er  $A$  også, idet  $(AB)C = I$  jo medfører, at  $BC$  er invers til  $A$ .
- ▶ Vi kan antage, at  $A$  er invertibel. Ved Gauss-eliminationen  $[A | I] \rightarrow [I | A^{-1}]$  ses, at  $\det A = (-1)^r \cdot \text{produkt\_pivot\_elementer}$ .



# Sætninger om determinanten

- ▶ Sætning 3.9  $A$  er regulær, hvis og kun hvis  $\det A \neq 0$ .
- ▶ Bevis. Hvis  $B$  fremkommer af  $A$  ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at  $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$ .
- ▶  $A$  er regulær, hvis og kun hvis  $A$  er rækkeækvivalent med enhedsmatricen. Men  $\det I = 1 \neq 0$ .
- ▶ Sætning 3.10  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .
- ▶ Bevis. Hvis  $AB$  er invertibel, så er  $A$  også, idet  $(AB)C = I$  jo medfører, at  $BC$  er invers til  $A$ .
- ▶ Vi kan antage, at  $A$  er invertibel. Ved Gauss-eliminationen  $[A \mid I] \rightarrow [I \mid A^{-1}]$  ses, at  $\det A = (-1)^r \cdot \text{produkt\_pivot\_elementer}$ .
- ▶ Samme rækkeoperationer gør:  $[A \mid AB] \rightarrow [I \mid B]$ . Men herved fås, at  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ .

# Sætninger om determinanten

- ▶ Sætning 3.9  $A$  er regulær, hvis og kun hvis  $\det A \neq 0$ .
- ▶ Bevis. Hvis  $B$  fremkommer af  $A$  ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at  $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$ .
- ▶  $A$  er regulær, hvis og kun hvis  $A$  er rækkeækvivalent med enhedsmatricen. Men  $\det I = 1 \neq 0$ .
- ▶ Sætning 3.10  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .
- ▶ Bevis. Hvis  $AB$  er invertibel, så er  $A$  også, idet  $(AB)C = I$  jo medfører, at  $BC$  er invers til  $A$ .
- ▶ Vi kan antage, at  $A$  er invertibel. Ved Gauss-eliminationen  $[A \mid I] \rightarrow [I \mid A^{-1}]$  ses, at  $\det A = (-1)^r \cdot \text{produkt\_pivot\_elementer}$ .
- ▶ Samme rækkeoperationer gør:  $[A \mid AB] \rightarrow [I \mid B]$ . Men herved fås, at  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ .
- ▶ **Korollar 3.11.**  $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ .

# Sætninger om determinanten

- ▶ Sætning 3.9  $A$  er regulær, hvis og kun hvis  $\det A \neq 0$ .
- ▶ Bevis. Hvis  $B$  fremkommer af  $A$  ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at  $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$ .
- ▶  $A$  er regulær, hvis og kun hvis  $A$  er rækkeækvivalent med enhedsmatricen. Men  $\det I = 1 \neq 0$ .
- ▶ Sætning 3.10  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .
- ▶ Bevis. Hvis  $AB$  er invertibel, så er  $A$  også, idet  $(AB)C = I$  jo medfører, at  $BC$  er invers til  $A$ .
- ▶ Vi kan antage, at  $A$  er invertibel. Ved Gauss-eliminationen  $[A \mid I] \rightarrow [I \mid A^{-1}]$  ses, at  $\det A = (-1)^r \cdot \text{produkt\_pivot\_elementer}$ .
- ▶ Samme rækkeoperationer gør:  $[A \mid AB] \rightarrow [I \mid B]$ . Men herved fås, at  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ .
- ▶ Korollar 3.11.  $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ .
- ▶ Sætning 3.12  $\det(A^T) = \det A$ .

# Sætninger om determinanten

- ▶ Sætning 3.9  $A$  er regulær, hvis og kun hvis  $\det A \neq 0$ .
- ▶ Bevis. Hvis  $B$  fremkommer af  $A$  ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at  $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$ .
- ▶  $A$  er regulær, hvis og kun hvis  $A$  er rækkeækvivalent med enhedsmatricen. Men  $\det I = 1 \neq 0$ .
- ▶ Sætning 3.10  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .
- ▶ Bevis. Hvis  $AB$  er invertibel, så er  $A$  også, idet  $(AB)C = I$  jo medfører, at  $BC$  er invers til  $A$ .
- ▶ Vi kan antage, at  $A$  er invertibel. Ved Gauss-eliminationen  $[A | I] \rightarrow [I | A^{-1}]$  ses, at  $\det A = (-1)^r \cdot \text{produkt\_pivot\_elementer}$ .
- ▶ Samme rækkeoperationer gør:  $[A | AB] \rightarrow [I | B]$ . Men herved fås, at  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ .
- ▶ Korollar 3.11.  $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ .
- ▶ Sætning 3.12  $\det(A^T) = \det A$ .
- ▶ Bevis:  $\det A = \sum_{S_n} \text{sgn}(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$   
 $= \sum_{S_n} \text{sgn}(i_1, i_2, i_3, \dots, i_n) a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} = \det(A^T)$ .

# Sætninger om determinanten

- ▶ Sætning 3.9  $A$  er regulær, hvis og kun hvis  $\det A \neq 0$ .
- ▶ Bevis. Hvis  $B$  fremkommer af  $A$  ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at  $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$ .
- ▶  $A$  er regulær, hvis og kun hvis  $A$  er rækkeækvivalent med enhedsmatricen. Men  $\det I = 1 \neq 0$ .
- ▶ Sætning 3.10  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .
- ▶ Bevis. Hvis  $AB$  er invertibel, så er  $A$  også, idet  $(AB)C = I$  jo medfører, at  $BC$  er invers til  $A$ .
- ▶ Vi kan antage, at  $A$  er invertibel. Ved Gauss-eliminationen  $[A | I] \rightarrow [I | A^{-1}]$  ses, at  $\det A = (-1)^r \cdot \text{produkt\_pivot\_elementer}$ .
- ▶ Samme rækkeoperationer gør:  $[A | AB] \rightarrow [I | B]$ . Men herved fås, at  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ .
- ▶ Korollar 3.11.  $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ .
- ▶ Sætning 3.12  $\det(A^T) = \det A$ .
- ▶ Bevis:  $\det A = \sum_{S_n} \text{sgn}(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$   
 $= \sum_{S_n} \text{sgn}(i_1, i_2, i_3, \dots, i_n) a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} = \det(A^T)$ .
- ▶ Maple.