

DesignMat Uge 2

Lineære afbildninger

Preben Alsholm

Efterår 2010

Definition

- ▶ Lad V og W være vektorrum over samme skalarlegeme \mathbb{L} (altså enten \mathbb{R} eller \mathbb{C} for begge).

Definition

Eksempel 1 på lineær
afbildning

Eksempel 2 på lineær
afbildning

Eksempel 3 og 4 på
lineær afbildning

Struktursætning m.m.

Matrixfremstilling for
lineære afbildninger I

Eksempel 1 på
afbildningsmatrix

Matrixfremstilling for
lineære afbildninger II

Eksempel 2 på
afbildningsmatrix I

Eksempel 2 på
afbildningsmatrix II

Definition

- ▶ Lad V og W være vektorrum over samme skalarlegeme \mathbb{L} (altså enten \mathbb{R} eller \mathbb{C} for begge).
- ▶ Afbildningen $f : V \rightarrow W$ kaldes *lineær*, hvis for alle $u, v \in V$ og $s \in \mathbb{L}$ vi har

$$\begin{aligned}f(u + v) &= f(u) + f(v) \\f(su) &= sf(u)\end{aligned}$$

Definition

Eksempel 1 på lineær
afbildning

Eksempel 2 på lineær
afbildning

Eksempel 3 og 4 på
lineær afbildning

Struktursætning mm.

Matrixfremstilling for
lineære afbildninger I

Eksempel 1 på
afbildningsmatrix

Matrixfremstilling for
lineære afbildninger II

Eksempel 2 på
afbildningsmatrix I

Eksempel 2 på
afbildningsmatrix II

Definition

- ▶ Lad V og W være vektorrum over samme skalarlegeme \mathbb{L} (altså enten \mathbb{R} eller \mathbb{C} for begge).
- ▶ Afbildningen $f : V \rightarrow W$ kaldes *lineær*, hvis for alle $u, v \in V$ og $s \in \mathbb{L}$ vi har

$$\begin{aligned}f(u + v) &= f(u) + f(v) \\ f(su) &= sf(u)\end{aligned}$$

- ▶ Eksempel 0. Lad a_1, a_2, \dots, a_n være en basis for V . Vi så i uge 12 i foråret, at koordinatafbildningen $K_a : V \rightarrow \mathbb{L}^n$ er lineær.

Lineære afbildninger

Definition

Eksempel 1 på lineær
afbildning

Eksempel 2 på lineær
afbildning

Eksempel 3 og 4 på
lineær afbildning

Struktursætning mm.

Matrixfremstilling for
lineære afbildninger I

Eksempel 1 på
afbildningsmatrix

Matrixfremstilling for
lineære afbildninger II

Eksempel 2 på
afbildningsmatrix I

Eksempel 2 på
afbildningsmatrix II

Definition

- ▶ Lad V og W være vektorrum over samme skalarlegeme \mathbb{L} (altså enten \mathbb{R} eller \mathbb{C} for begge).
- ▶ Afbildningen $f : V \rightarrow W$ kaldes *lineær*, hvis for alle $u, v \in V$ og $s \in \mathbb{L}$ vi har

$$\begin{aligned}f(u + v) &= f(u) + f(v) \\ f(su) &= sf(u)\end{aligned}$$

- ▶ Eksempel 0. Lad a_1, a_2, \dots, a_n være en basis for V . Vi så i uge 12 i foråret, at koordinatafbildningen $K_a : V \rightarrow \mathbb{L}^n$ er lineær.
- ▶ *Kernen* for $f : V \rightarrow W$ er mængden $\ker f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$. Kaldes også *nulrummet* og betegnes ofte i stedet med $N(f)$. Kernen er et underrum af V .

Lineære afbildninger

Definition

Eksempel 1 på lineær
afbildning

Eksempel 2 på lineær
afbildning

Eksempel 3 og 4 på
lineær afbildning

Struktursætning mm.

Matrixfremstilling for
lineære afbildninger I

Eksempel 1 på
afbildningsmatrix

Matrixfremstilling for
lineære afbildninger II

Eksempel 2 på
afbildningsmatrix I

Eksempel 2 på
afbildningsmatrix II

Definition

- ▶ Lad V og W være vektorrum over samme skalarlegeme \mathbb{L} (altså enten \mathbb{R} eller \mathbb{C} for begge).
- ▶ Afbildningen $f : V \rightarrow W$ kaldes *lineær*, hvis for alle $u, v \in V$ og $s \in \mathbb{L}$ vi har

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(u) + f(v) \\ f(su) &= sf(u) \end{aligned}$$

- ▶ Eksempel 0. Lad a_1, a_2, \dots, a_n være en basis for V . Vi så i uge 12 i foråret, at koordinatafbildningen $K_a : V \rightarrow \mathbb{L}^n$ er lineær.
- ▶ *Kernen* for $f : V \rightarrow W$ er mængden $\ker f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$. Kaldes også *nulrummet* og betegnes ofte i stedet med $N(f)$. Kernen er et underrum af V .
- ▶ *Billedrummet* for f er $f(V) = \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ så } f(v) = w\}$. Billedrummet er et underrum af W .

Lineære
afbildninger

Definition

Eksempel 1 på lineær
afbildningEksempel 2 på lineær
afbildningEksempel 3 og 4 på
lineær afbildning

Struktursætning mm.

Matrixfremstilling for
lineære afbildninger IEksempel 1 på
afbildningsmatrixMatrixfremstilling for
lineære afbildninger IIEksempel 2 på
afbildningsmatrix IEksempel 2 på
afbildningsmatrix II

Eksempel 1 på lineær afbildning

- ▶ Lad A være en $m \times n$ -matrix. Definer afbildningen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ved $f(x) = Ax$ for alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Eksempel 1 på lineær afbildning

- ▶ Lad A være en $m \times n$ -matrix. Definer afbildningen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ved $f(x) = Ax$ for alle $x \in \mathbb{R}^n$.
- ▶ f er lineær: For alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ og $s \in \mathbb{R}$ gælder $f(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = f(x) + f(y)$ og $f(sx) = A(sx) = sAx = sf(x)$.

Lineære afbildninger

Definition

Eksempel 1 på lineær afbildning

Eksempel 2 på lineær afbildning

Eksempel 3 og 4 på lineær afbildning

Struktursætning mm.

Matrixfremstilling for lineære afbildninger I

Eksempel 1 på afbildningsmatrix

Matrixfremstilling for lineære afbildninger II

Eksempel 2 på afbildningsmatrix I

Eksempel 2 på afbildningsmatrix II

Eksempel 1 på lineær afbildning

- ▶ Lad A være en $m \times n$ -matrix. Definer afbildningen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ved $f(x) = Ax$ for alle $x \in \mathbb{R}^n$.
- ▶ f er lineær: For alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ og $s \in \mathbb{R}$ gælder $f(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = f(x) + f(y)$ og $f(sx) = A(sx) = sAx = sf(x)$.
- ▶ $\ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} = N(A)$ nulrummet for matrixen A .

Lineære afbildninger

Definition

Eksempel 1 på lineær afbildning

Eksempel 2 på lineær afbildning

Eksempel 3 og 4 på lineær afbildning

Struktursætning mm.

Matrixfremstilling for lineære afbildninger I

Eksempel 1 på afbildningsmatrix

Matrixfremstilling for lineære afbildninger II

Eksempel 2 på afbildningsmatrix I

Eksempel 2 på afbildningsmatrix II

Eksempel 1 på lineær afbildning

- ▶ Lad A være en $m \times n$ -matrix. Definer afbildningen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ved $f(x) = Ax$ for alle $x \in \mathbb{R}^n$.
- ▶ f er lineær: For alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ og $s \in \mathbb{R}$ gælder $f(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = f(x) + f(y)$ og $f(sx) = A(sx) = sAx = sf(x)$.
- ▶ $\ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} = N(A)$ nulrummet for matrixen A .
- ▶ $f(\mathbb{R}^n) = \text{Col}(A) =$ søjlerummet, rummet udspændt af søjlerne i A .

Lineære afbildninger

Definition

Eksempel 1 på lineær afbildning

Eksempel 2 på lineær afbildning

Eksempel 3 og 4 på lineær afbildning

Struktursætning mm.

Matrixfremstilling for lineære afbildninger I

Eksempel 1 på afbildningsmatrix

Matrixfremstilling for lineære afbildninger II

Eksempel 2 på afbildningsmatrix I

Eksempel 2 på afbildningsmatrix II

Eksempel 1 på lineær afbildning

- ▶ Lad A være en $m \times n$ -matrix. Definer afbildningen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ved $f(x) = Ax$ for alle $x \in \mathbb{R}^n$.
- ▶ f er lineær: For alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ og $s \in \mathbb{R}$ gælder $f(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = f(x) + f(y)$ og $f(sx) = A(sx) = sAx = sf(x)$.
- ▶ $\ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} = N(A)$ nulrummet for matrixen A .
- ▶ $f(\mathbb{R}^n) = \text{Col}(A) =$ søjlerummet, rummet udspændt af søjlerne i A .
- ▶ Konkret eksempel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.
 $\ker(f) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T\right)$. $f(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2$.

Lineære
afbildninger

Definition

Eksempel 1 på lineær
afbildningEksempel 2 på lineær
afbildningEksempel 3 og 4 på
lineær afbildning

Struktursætning mm.

Matrixfremstilling for
lineære afbildninger IEksempel 1 på
afbildningsmatrixMatrixfremstilling for
lineære afbildninger IIEksempel 2 på
afbildningsmatrix IEksempel 2 på
afbildningsmatrix II

Eksempel 1 på lineær afbildning

- ▶ Lad A være en $m \times n$ -matrix. Definer afbildningen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ved $f(x) = Ax$ for alle $x \in \mathbb{R}^n$.
- ▶ f er lineær: For alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ og $s \in \mathbb{R}$ gælder $f(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = f(x) + f(y)$ og $f(sx) = A(sx) = sAx = sf(x)$.
- ▶ $\ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} = N(A)$ nulrummet for matrixen A .
- ▶ $f(\mathbb{R}^n) = \text{Col}(A) =$ søjlerummet, rummet udspændt af søjlerne i A .
- ▶ Konkret eksempel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.
 $\ker(f) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T\right)$. $f(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2$.
- ▶ Vi skal senere se, at alle lineære afbildninger mellem endelig-dimensionale vektorrum kan repræsenteres ved matrixafbildninger.

Eksempel 2 på lineær afbildning

- ▶ Lad $P_n(\mathbb{R})$ være mængden af reelle polynomier af grad højst n og med variabelnavn x .

Eksempel 2 på lineær afbildning

- ▶ Lad $P_n(\mathbb{R})$ være mængden af reelle polynomier af grad højst n og med variabelnavn x .
- ▶ Differentiationsoperatoren $D_x : P_n(\mathbb{R}) \rightarrow P_n(\mathbb{R})$ givet ved $D_x(p(x)) = p'(x)$ for alle $p(x) \in P_n(\mathbb{R})$.

Lineære afbildninger

Definition

Eksempel 1 på lineær
afbildning

Eksempel 2 på lineær
afbildning

Eksempel 3 og 4 på
lineær afbildning

Struktursætning mm.

Matrixfremstilling for
lineære afbildninger I

Eksempel 1 på
afbildningsmatrix

Matrixfremstilling for
lineære afbildninger II

Eksempel 2 på
afbildningsmatrix I

Eksempel 2 på
afbildningsmatrix II

Eksempel 2 på lineær afbildning

- ▶ Lad $P_n(\mathbb{R})$ være mængden af reelle polynomier af grad højst n og med variabelnavn x .
- ▶ Differentiationsoperatoren $D_x : P_n(\mathbb{R}) \rightarrow P_n(\mathbb{R})$ givet ved $D_x(p(x)) = p'(x)$ for alle $p(x) \in P_n(\mathbb{R})$.
- ▶ At D_x er lineær er en velkendt sag om differentiation af sum og differentiation af udtryk ganget med en konstant.

Lineære afbildninger

Definition

Eksempel 1 på lineær
afbildning

Eksempel 2 på lineær
afbildning

Eksempel 3 og 4 på
lineær afbildning

Struktursætning mm.

Matrixfremstilling for
lineære afbildninger I

Eksempel 1 på
afbildningsmatrix

Matrixfremstilling for
lineære afbildninger II

Eksempel 2 på
afbildningsmatrix I

Eksempel 2 på
afbildningsmatrix II

Eksempel 2 på lineær afbildning

- ▶ Lad $P_n(\mathbb{R})$ være mængden af reelle polynomier af grad højst n og med variabelnavn x .
- ▶ Differentiationsoperatoren $D_x : P_n(\mathbb{R}) \rightarrow P_n(\mathbb{R})$ givet ved $D_x(p(x)) = p'(x)$ for alle $p(x) \in P_n(\mathbb{R})$.
- ▶ At D_x er lineær er en velkendt sag om differentiation af sum og differentiation af udtryk ganget med en konstant.
- ▶ $\ker(D_x) = P_0(\mathbb{R})$ altså mængden af konstante polynomier.

Eksempel 2 på lineær afbildning

- ▶ Lad $P_n(\mathbb{R})$ være mængden af reelle polynomier af grad højst n og med variabelnavn x .
- ▶ Differentiationsoperatoren $D_x : P_n(\mathbb{R}) \rightarrow P_n(\mathbb{R})$ givet ved $D_x(p(x)) = p'(x)$ for alle $p(x) \in P_n(\mathbb{R})$.
- ▶ At D_x er lineær er en velkendt sag om differentiation af sum og differentiation af udtryk ganget med en konstant.
- ▶ $\ker(D_x) = P_0(\mathbb{R})$ altså mængden af konstante polynomier.
- ▶ $D_x(P_n(\mathbb{R})) = P_{n-1}(\mathbb{R})$.

Lineære afbildninger

Definition

Eksempel 1 på lineær
afbildning

Eksempel 2 på lineær
afbildning

Eksempel 3 og 4 på
lineær afbildning

Struktursætning mm.

Matrixfremstilling for
lineære afbildninger I

Eksempel 1 på
afbildningsmatrix

Matrixfremstilling for
lineære afbildninger II

Eksempel 2 på
afbildningsmatrix I

Eksempel 2 på
afbildningsmatrix II

Eksempel 2 på lineær afbildning

- ▶ Lad $P_n(\mathbb{R})$ være mængden af reelle polynomier af grad højst n og med variabelnavn x .
- ▶ Differentiationsoperatoren $D_x : P_n(\mathbb{R}) \rightarrow P_n(\mathbb{R})$ givet ved $D_x(p(x)) = p'(x)$ for alle $p(x) \in P_n(\mathbb{R})$.
- ▶ At D_x er lineær er en velkendt sag om differentiation af sum og differentiation af udtryk ganget med en konstant.
- ▶ $\ker(D_x) = P_0(\mathbb{R})$ altså mængden af konstante polynomier.
- ▶ $D_x(P_n(\mathbb{R})) = P_{n-1}(\mathbb{R})$.
- ▶ Bemærk, at vi kunne have betragtet D_x som en afbildning fra $P_n(\mathbb{R})$ til $P_{n-1}(\mathbb{R})$. Den ville så have været surjektiv.

Lineære afbildninger

Definition

Eksempel 1 på lineær afbildning

Eksempel 2 på lineær afbildning

Eksempel 3 og 4 på lineær afbildning

Struktursætning mm.

Matrixfremstilling for lineære afbildninger I

Eksempel 1 på afbildningsmatrix

Matrixfremstilling for lineære afbildninger II

Eksempel 2 på afbildningsmatrix I

Eksempel 2 på afbildningsmatrix II

Eksempel 3 og 4 på lineær afbildning

- ▶ Afbildningen $D : C^1(I) \rightarrow C^0(I)$ givet ved $D(g) = g'$ for alle $g \in C^1(I)$ er lineær.

Eksempel 3 og 4 på lineær afbildning

- ▶ Afbildningen $D : C^1(I) \rightarrow C^0(I)$ givet ved $D(g) = g'$ for alle $g \in C^1(I)$ er lineær.
- ▶ $\ker(D)$ er mængden af funktioner konstante på intervallet I .

Eksempel 3 og 4 på lineær afbildning

- ▶ Afbildningen $D : C^1(I) \rightarrow C^0(I)$ givet ved $D(g) = g'$ for alle $g \in C^1(I)$ er lineær.
- ▶ $\ker(D)$ er mængden af funktioner konstante på intervallet I .
- ▶ D er surjektiv, da enhver kontinuert funktion har en stamfunktion.

Lineære
afbildninger

Definition

Eksempel 1 på lineær
afbildningEksempel 2 på lineær
afbildning**Eksempel 3 og 4 på
lineær afbildning**

Struktursætning mm.

Matrixfremstilling for
lineære afbildninger IEksempel 1 på
afbildningsmatrixMatrixfremstilling for
lineære afbildninger IIEksempel 2 på
afbildningsmatrix IEksempel 2 på
afbildningsmatrix II

Eksempel 3 og 4 på lineær afbildning

- ▶ Afbildningen $D : C^1(I) \rightarrow C^0(I)$ givet ved $D(g) = g'$ for alle $g \in C^1(I)$ er lineær.
- ▶ $\ker(D)$ er mængden af funktioner konstante på intervallet I .
- ▶ D er surjektiv, da enhver kontinuert funktion har en stamfunktion.
- ▶ Differentialoperatoren $d : C^2(\mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R})$ givet ved $d(g) = 3g'' + 2g' - 5g$ for alle $g \in C^2(\mathbb{R})$ er lineær.

Eksempel 3 og 4 på lineær afbildning

- ▶ Afbildningen $D : C^1(I) \rightarrow C^0(I)$ givet ved $D(g) = g'$ for alle $g \in C^1(I)$ er lineær.
- ▶ $\ker(D)$ er mængden af funktioner konstante på intervallet I .
- ▶ D er surjektiv, da enhver kontinuert funktion har en stamfunktion.
- ▶ Differentialoperatoren $d : C^2(\mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R})$ givet ved $d(g) = 3g'' + 2g' - 5g$ for alle $g \in C^2(\mathbb{R})$ er lineær.
- ▶ $\ker(d)$ er mængden af løsninger til den homogene lineære differentiaalligning $3g'' + 2g' - 5g = 0$.

Eksempel 3 og 4 på lineær afbildning

- ▶ Afbildningen $D : C^1(I) \rightarrow C^0(I)$ givet ved $D(g) = g'$ for alle $g \in C^1(I)$ er lineær.
- ▶ $\ker(D)$ er mængden af funktioner konstante på intervallet I .
- ▶ D er surjektiv, da enhver kontinuert funktion har en stamfunktion.
- ▶ Differentialoperatoren $d : C^2(\mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R})$ givet ved $d(g) = 3g'' + 2g' - 5g$ for alle $g \in C^2(\mathbb{R})$ er lineær.
- ▶ $\ker(d)$ er mængden af løsninger til den homogene lineære differentialligning $3g'' + 2g' - 5g = 0$.
- ▶ Den fuldstændige løsning er $g(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-\frac{5}{3}t}$.

Eksempel 3 og 4 på lineær afbildning

- ▶ Afbildningen $D : C^1(I) \rightarrow C^0(I)$ givet ved $D(g) = g'$ for alle $g \in C^1(I)$ er lineær.
- ▶ $\ker(D)$ er mængden af funktioner konstante på intervallet I .
- ▶ D er surjektiv, da enhver kontinuert funktion har en stamfunktion.
- ▶ Differentialoperatoren $d : C^2(\mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R})$ givet ved $d(g) = 3g'' + 2g' - 5g$ for alle $g \in C^2(\mathbb{R})$ er lineær.
- ▶ $\ker(d)$ er mængden af løsninger til den homogene lineære differentialligning $3g'' + 2g' - 5g = 0$.
- ▶ Den fuldstændige løsning er $g(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-\frac{5}{3}t}$.
- ▶ Vi ser, at en basis for $\ker(d)$ er funktionerne $t \mapsto e^t$ og $t \mapsto e^{-\frac{5}{3}t}$. Så $\dim \ker(d) = 2$.

Eksempel 3 og 4 på lineær afbildning

- ▶ Afbildningen $D : C^1(I) \rightarrow C^0(I)$ givet ved $D(g) = g'$ for alle $g \in C^1(I)$ er lineær.
- ▶ $\ker(D)$ er mængden af funktioner konstante på intervallet I .
- ▶ D er surjektiv, da enhver kontinuert funktion har en stamfunktion.
- ▶ Differentialoperatoren $d : C^2(\mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R})$ givet ved $d(g) = 3g'' + 2g' - 5g$ for alle $g \in C^2(\mathbb{R})$ er lineær.
- ▶ $\ker(d)$ er mængden af løsninger til den homogene lineære differentialligning $3g'' + 2g' - 5g = 0$.
- ▶ Den fuldstændige løsning er $g(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-\frac{5}{3}t}$.
- ▶ Vi ser, at en basis for $\ker(d)$ er funktionerne $t \mapsto e^t$ og $t \mapsto e^{-\frac{5}{3}t}$. Så $\dim \ker(d) = 2$.
- ▶ At billedrummet $d(C^2(\mathbb{R})) = C^0(\mathbb{R})$ følger af, at $3g'' + 2g' - 5g = q$ har en løsning for alle $q \in C^0(\mathbb{R})$.

Struktursætning mm.

- ▶ Hvis $x_p \in V$ er en partikulær løsning til den lineære ligning $f(x) = b$, så er den fuldstændige løsning summen af x_p og den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning $f(x) = 0$.

Struktursætning mm.

- ▶ Hvis $x_p \in V$ er en partikulær løsning til den lineære ligning $f(x) = b$, så er den fuldstændige løsning summen af x_p og den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning $f(x) = 0$.
- ▶ Som bekendt er denne sætning meget anvendelig, når f er en lineær differentialoperator.

Struktursætning mm.

- ▶ Hvis $x_p \in V$ er en partikulær løsning til den lineære ligning $f(x) = b$, så er den fuldstændige løsning summen af x_p og den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning $f(x) = 0$.
- ▶ Som bekendt er denne sætning meget anvendelig, når f er en lineær differentialoperator.
- ▶ Så lyder den: Hvis x_p er en partikulær løsning til den inhomogene differentiallygning, så er den fuldstændige løsning summen af x_p og den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene differentiallygning.

Struktursætning mm.

- ▶ Hvis $x_p \in V$ er en partikulær løsning til den lineære ligning $f(x) = b$, så er den fuldstændige løsning summen af x_p og den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning $f(x) = 0$.
- ▶ Som bekendt er denne sætning meget anvendelig, når f er en lineær differentialoperator.
- ▶ Så lyder den: Hvis x_p er en partikulær løsning til den inhomogene differentiallygning, så er den fuldstændige løsning summen af x_p og den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene differentiallygning.
- ▶ *Rangen af f defineres som $\rho(f) = \dim f(V)$.*

Struktursætning mm.

- ▶ Hvis $x_p \in V$ er en partikulær løsning til den lineære ligning $f(x) = b$, så er den fuldstændige løsning summen af x_p og den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning $f(x) = 0$.
- ▶ Som bekendt er denne sætning meget anvendelig, når f er en lineær differentialoperator.
- ▶ Så lyder den: Hvis x_p er en partikulær løsning til den inhomogene differentiaalligning, så er den fuldstændige løsning summen af x_p og den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene differentiaalligning.
- ▶ *Rangen* af f defineres som $\rho(f) = \dim f(V)$.
- ▶ *Nulliteten* for f defineres som $\nu(f) = \dim \ker(f)$.

Struktursætning mm.

- ▶ Hvis $x_p \in V$ er en partikulær løsning til den lineære ligning $f(x) = b$, så er den fuldstændige løsning summen af x_p og den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning $f(x) = 0$.
- ▶ Som bekendt er denne sætning meget anvendelig, når f er en lineær differentialoperator.
- ▶ Så lyder den: Hvis x_p er en partikulær løsning til den inhomogene differentiallygning, så er den fuldstændige løsning summen af x_p og den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene differentiallygning.
- ▶ *Rangen* af f defineres som $\rho(f) = \dim f(V)$.
- ▶ *Nulliteten* for f defineres som $\nu(f) = \dim \ker(f)$.
- ▶ **Dimensionssætningen.** Lad $f : V \rightarrow W$ være lineær. Så gælder $\dim V = \nu(f) + \rho(f)$.

Struktursætning mm.

- ▶ Hvis $x_p \in V$ er en partikulær løsning til den lineære ligning $f(x) = b$, så er den fuldstændige løsning summen af x_p og den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning $f(x) = 0$.
- ▶ Som bekendt er denne sætning meget anvendelig, når f er en lineær differentialoperator.
- ▶ Så lyder den: Hvis x_p er en partikulær løsning til den inhomogene differentiallygning, så er den fuldstændige løsning summen af x_p og den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene differentiallygning.
- ▶ *Rangen* af f defineres som $\rho(f) = \dim f(V)$.
- ▶ *Nulliteten* for f defineres som $\nu(f) = \dim \ker(f)$.
- ▶ Dimensionssætningen. Lad $f : V \rightarrow W$ være lineær. Så gælder $\dim V = \nu(f) + \rho(f)$.
- ▶ **Beviset udskydes til matrixfremstillingen for en lineær afbildning er på plads.**

Matrixfremstilling for lineære afbildninger I

- ▶ Lad $f : V \rightarrow W$. Lad a_1, a_2, \dots, a_n være en basis for V , og lad c_1, c_2, \dots, c_m være en basis for W .

Matrixfremstilling for lineære afbildninger I

- ▶ Lad $f : V \rightarrow W$. Lad a_1, a_2, \dots, a_n være en basis for V , og lad c_1, c_2, \dots, c_m være en basis for W .
- ▶ **Afbildningsmatricen for f mht. de givne baser defineres som**

$${}_c F_a = [K_c(f(a_1)) \quad K_c(f(a_2)) \quad \dots \quad K_c(f(a_n))]$$

Lineære afbildninger

Definition

Eksempel 1 på lineær
afbildningEksempel 2 på lineær
afbildningEksempel 3 og 4 på
lineær afbildning

Struktursætning mm.

**Matrixfremstilling for
lineære afbildninger I**Eksempel 1 på
afbildningsmatrixMatrixfremstilling for
lineære afbildninger IIEksempel 2 på
afbildningsmatrix IEksempel 2 på
afbildningsmatrix II

Matrixfremstilling for lineære afbildninger I

- ▶ Lad $f : V \rightarrow W$. Lad a_1, a_2, \dots, a_n være en basis for V , og lad c_1, c_2, \dots, c_m være en basis for W .
- ▶ Afbildningsmatricen for f mht. de givne baser defineres som

$${}_c F_a = [K_c(f(a_1)) \quad K_c(f(a_2)) \quad \dots \quad K_c(f(a_n))]$$

- ▶ ${}_c F_a$ er åbenbart en $m \times n$ -matrix.

Matrixfremstilling for lineære afbildninger I

- ▶ Lad $f : V \rightarrow W$. Lad a_1, a_2, \dots, a_n være en basis for V , og lad c_1, c_2, \dots, c_m være en basis for W .
- ▶ Afbildningsmatricen for f mht. de givne baser defineres som

$${}_c F_a = [K_c(f(a_1)) \quad K_c(f(a_2)) \quad \dots \quad K_c(f(a_n))]$$

- ▶ ${}_c F_a$ er åbenbart en $m \times n$ -matrix.
- ▶ Der er en enentydig sammenhæng mellem $m \times n$ -matricer og lineære afbildninger fra V til W .

Lineære afbildninger

Definition

Eksempel 1 på lineær
afbildningEksempel 2 på lineær
afbildningEksempel 3 og 4 på
lineær afbildning

Struktursætning mm.

**Matrixfremstilling for
lineære afbildninger I**Eksempel 1 på
afbildningsmatrixMatrixfremstilling for
lineære afbildninger IIEksempel 2 på
afbildningsmatrix IEksempel 2 på
afbildningsmatrix II

Matrixfremstilling for lineære afbildninger I

- ▶ Lad $f : V \rightarrow W$. Lad a_1, a_2, \dots, a_n være en basis for V , og lad c_1, c_2, \dots, c_m være en basis for W .
- ▶ Afbildningsmatricen for f mht. de givne baser defineres som

$${}_c F_a = [K_c(f(a_1)) \quad K_c(f(a_2)) \quad \dots \quad K_c(f(a_n))]$$

- ▶ ${}_c F_a$ er åbenbart en $m \times n$ -matrix.
- ▶ Der er en enentydig sammenhæng mellem $m \times n$ -matricer og lineære afbildninger fra V til W .
- ▶ **Sætning 6.6.** $K_c(f(v)) = {}_c F_a K_a(v)$ for alle $v \in V$.

Matrixfremstilling for lineære afbildninger I

- ▶ Lad $f : V \rightarrow W$. Lad a_1, a_2, \dots, a_n være en basis for V , og lad c_1, c_2, \dots, c_m være en basis for W .
- ▶ Afbildningsmatricen for f mht. de givne baser defineres som

$${}_c F_a = [K_c(f(a_1)) \quad K_c(f(a_2)) \quad \dots \quad K_c(f(a_n))]$$

- ▶ ${}_c F_a$ er åbenbart en $m \times n$ -matrix.
- ▶ Der er en enetydig sammenhæng mellem $m \times n$ -matricer og lineære afbildninger fra V til W .
- ▶ Sætning 6.6. $K_c(f(v)) = {}_c F_a K_a(v)$ for alle $v \in V$.
- ▶ **Bevis.** Skriv $v = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$. Så er $x = K_a(v)$ og $f(v) = x_1 f(a_1) + \dots + x_n f(a_n)$.

Matrixfremstilling for lineære afbildninger I

- ▶ Lad $f : V \rightarrow W$. Lad a_1, a_2, \dots, a_n være en basis for V , og lad c_1, c_2, \dots, c_m være en basis for W .
- ▶ Afbildningsmatricen for f mht. de givne baser defineres som

$${}_c F_a = [K_c(f(a_1)) \quad K_c(f(a_2)) \quad \dots \quad K_c(f(a_n))]$$

- ▶ ${}_c F_a$ er åbenbart en $m \times n$ -matrix.
- ▶ Der er en enetydig sammenhæng mellem $m \times n$ -matricer og lineære afbildninger fra V til W .
- ▶ Sætning 6.6. $K_c(f(v)) = {}_c F_a K_a(v)$ for alle $v \in V$.
- ▶ Bevis. Skriv $v = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$. Så er $x = K_a(v)$ og $f(v) = x_1 f(a_1) + \dots + x_n f(a_n)$.

- ▶ **Dermed fås**

$$\begin{aligned} K_c(f(v)) &= x_1 K_c(f(a_1)) + \dots + x_n K_c(f(a_n)) = \\ &= [K_c(f(a_1)) \quad K_c(f(a_2)) \quad \dots \quad K_c(f(a_n))] x = \\ &= {}_c F_a K_a(v). \end{aligned}$$

Eksempel 1 på afbildningsmatrix

- ▶ $D_x : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ givet ved $D_x(p(x)) = p'(x)$ for alle $p(x) \in P_3(\mathbb{R})$.

Lineære
afbildninger

Definition

Eksempel 1 på lineær
afbildningEksempel 2 på lineær
afbildningEksempel 3 og 4 på
lineær afbildning

Struktursætning mm.

Matrixfremstilling for
lineære afbildninger I**Eksempel 1 på
afbildningsmatrix**Matrixfremstilling for
lineære afbildninger IIEksempel 2 på
afbildningsmatrix IEksempel 2 på
afbildningsmatrix II

Eksempel 1 på afbildningsmatrix

- ▶ $D_x : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ givet ved $D_x(p(x)) = p'(x)$ for alle $p(x) \in P_3(\mathbb{R})$.
- ▶ Monomiebasen (m_3) i $P_3(\mathbb{R})$, altså $1, x, x^2, x^3$ og monomiebasen (m_2) i $P_2(\mathbb{R})$, altså $1, x, x^2$.

Lineære
afbildninger

Definition

Eksempel 1 på lineær
afbildningEksempel 2 på lineær
afbildningEksempel 3 og 4 på
lineær afbildning

Struktursætning mm.

Matrixfremstilling for
lineære afbildninger I**Eksempel 1 på
afbildningsmatrix**Matrixfremstilling for
lineære afbildninger IIEksempel 2 på
afbildningsmatrix IEksempel 2 på
afbildningsmatrix II

Eksempel 1 på afbildningsmatrix

▶ $D_x : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ givet ved $D_x(p(x)) = p'(x)$ for alle $p(x) \in P_3(\mathbb{R})$.

▶ Monomiebasen (m_3) i $P_3(\mathbb{R})$, altså $1, x, x^2, x^3$ og monomiebasen (m_2) i $P_2(\mathbb{R})$, altså $1, x, x^2$.

▶ ${}_{m_2}F_{m_3} =$

$$\left[K_{m_2}(D_x(1)) \quad K_{m_2}(D_x(x)) \quad K_{m_2}(D_x(x^2)) \quad K_{m_2}(D_x(x^3)) \right]$$

Eksempel 1 på afbildningsmatrix

- ▶ $D_x : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ givet ved $D_x(p(x)) = p'(x)$ for alle $p(x) \in P_3(\mathbb{R})$.
- ▶ Monomiebasen (m_3) i $P_3(\mathbb{R})$, altså $1, x, x^2, x^3$ og monomiebasen (m_2) i $P_2(\mathbb{R})$, altså $1, x, x^2$.
- ▶ ${}_{m_2}F_{m_3} =$

$$\begin{bmatrix} K_{m_2}(D_x(1)) & K_{m_2}(D_x(x)) & K_{m_2}(D_x(x^2)) & K_{m_2}(D_x(x^3)) \end{bmatrix}$$
- ▶ ${}_{m_2}F_{m_3} =$

$$\begin{bmatrix} K_{m_2}(0) & K_{m_2}(1) & K_{m_2}(2x) & K_{m_2}(3x^2) \end{bmatrix}.$$

Lineære
afbildninger

Definition

Eksempel 1 på lineær
afbildningEksempel 2 på lineær
afbildningEksempel 3 og 4 på
lineær afbildning

Strukturregning mm.

Matrixfremstilling for
lineære afbildninger I**Eksempel 1 på
afbildningsmatrix**Matrixfremstilling for
lineære afbildninger IIEksempel 2 på
afbildningsmatrix IEksempel 2 på
afbildningsmatrix II

Eksempel 1 på afbildningsmatrix

▶ $D_x : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ givet ved $D_x(p(x)) = p'(x)$ for alle $p(x) \in P_3(\mathbb{R})$.

▶ Monomiebasen (m_3) i $P_3(\mathbb{R})$, altså $1, x, x^2, x^3$ og monomiebasen (m_2) i $P_2(\mathbb{R})$, altså $1, x, x^2$.

▶ ${}_{m_2}F_{m_3} =$

$$\left[K_{m_2}(D_x(1)) \quad K_{m_2}(D_x(x)) \quad K_{m_2}(D_x(x^2)) \quad K_{m_2}(D_x(x^3)) \right]$$

▶ ${}_{m_2}F_{m_3} =$

$$\left[K_{m_2}(0) \quad K_{m_2}(1) \quad K_{m_2}(2x) \quad K_{m_2}(3x^2) \right].$$

▶ ${}_{m_2}F_{m_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$

Eksempel 1 på afbildningsmatrix

▶ $D_x : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ givet ved $D_x(p(x)) = p'(x)$ for alle $p(x) \in P_3(\mathbb{R})$.

▶ Monomiebasen (m_3) i $P_3(\mathbb{R})$, altså $1, x, x^2, x^3$ og monomiebasen (m_2) i $P_2(\mathbb{R})$, altså $1, x, x^2$.

▶ ${}_{m_2}F_{m_3} =$

$$\left[K_{m_2}(D_x(1)) \quad K_{m_2}(D_x(x)) \quad K_{m_2}(D_x(x^2)) \quad K_{m_2}(D_x(x^3)) \right]$$

▶ ${}_{m_2}F_{m_3} =$

$$\left[K_{m_2}(0) \quad K_{m_2}(1) \quad K_{m_2}(2x) \quad K_{m_2}(3x^2) \right].$$

▶ ${}_{m_2}F_{m_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$

▶ Polynomiet $p(x) = 7x^3 + 4x + 2$ kan nu differentieres således $K_{m_2}(D_x(p(x))) = {}_{m_2}F_{m_3}K_{m_3}(p(x)) =$

$${}_{m_2}F_{m_3} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 21 \end{bmatrix}. \text{ Altså } D_x(p(x)) = 4 + 21x^2.$$

Matrixfremstilling for lineære afbildninger II

- ▶ Vi så i Sætning 6.6 at for en given lineær afbildning f og givne baser a og c gælder $K_c(f(v)) = {}_cF_aK_a(v)$ for alle $v \in V$.

Lineære afbildninger

Definition

Eksempel 1 på lineær
afbildning

Eksempel 2 på lineær
afbildning

Eksempel 3 og 4 på
lineær afbildning

Struktursætning mm.

Matrixfremstilling for
lineære afbildninger I

Eksempel 1 på
afbildningsmatrix

**Matrixfremstilling for
lineære afbildninger II**

Eksempel 2 på
afbildningsmatrix I

Eksempel 2 på
afbildningsmatrix II

Matrixfremstilling for lineære afbildninger II

- ▶ Vi så i Sætning 6.6 at for en given lineær afbildning f og givne baser a og c gælder $K_c(f(v)) = {}_cF_a K_a(v)$ for alle $v \in V$.
- ▶ Omvendt gælder: Hvis der til $f : V \rightarrow W$ findes en matrix F , så $K_c(f(v)) = FK_a(v)$ for alle $v \in V$, så er f lineær og $F = {}_cF_a$.

Lineære afbildninger

Definition

Eksempel 1 på lineær
afbildning

Eksempel 2 på lineær
afbildning

Eksempel 3 og 4 på
lineær afbildning

Struktursætning mm.

Matrixfremstilling for
lineære afbildninger I

Eksempel 1 på
afbildningsmatrix

**Matrixfremstilling for
lineære afbildninger II**

Eksempel 2 på
afbildningsmatrix I

Eksempel 2 på
afbildningsmatrix II

Matrixfremstilling for lineære afbildninger II

- ▶ Vi så i Sætning 6.6 at for en given lineær afbildning f og givne baser a og c gælder $K_c(f(v)) = {}_cF_a K_a(v)$ for alle $v \in V$.
- ▶ Omvendt gælder: Hvis der til $f : V \rightarrow W$ findes en matrix F , så $K_c(f(v)) = FK_a(v)$ for alle $v \in V$, så er f lineær og $F = {}_cF_a$.
- ▶ **Linearitet: Af $K_c f(v) = FK_a(v)$ følger $f(v) = K_c^{-1}FK_a(v)$. Men højresiden er lineær i v .**

Lineære afbildninger

Definition

Eksempel 1 på lineær
afbildning

Eksempel 2 på lineær
afbildning

Eksempel 3 og 4 på
lineær afbildning

Struktursætning mm.

Matrixfremstilling for
lineære afbildninger I

Eksempel 1 på
afbildningsmatrix

**Matrixfremstilling for
lineære afbildninger II**

Eksempel 2 på
afbildningsmatrix I

Eksempel 2 på
afbildningsmatrix II

Matrixfremstilling for lineære afbildninger II

- ▶ Vi så i Sætning 6.6 at for en given lineær afbildning f og givne baser a og c gælder $K_c(f(v)) = {}_cF_a K_a(v)$ for alle $v \in V$.
- ▶ Omvendt gælder: Hvis der til $f : V \rightarrow W$ findes en matrix F , så $K_c(f(v)) = FK_a(v)$ for alle $v \in V$, så er f lineær og $F = {}_cF_a$.
- ▶ Linearitet: Af $K_c f(v) = FK_a(v)$ følger $f(v) = K_c^{-1}FK_a(v)$. Men højresiden er lineær i v .
- ▶ Videre fås $FK_a(v) = {}_cF_a K_a(v)$ for alle $v \in V$. Heraf følger $F = {}_cF_a$.

Lineære afbildninger

Definition

Eksempel 1 på lineær afbildning

Eksempel 2 på lineær afbildning

Eksempel 3 og 4 på lineær afbildning

Struktursætning mm.

Matrixfremstilling for lineære afbildninger I

Eksempel 1 på afbildningsmatrix

Matrixfremstilling for lineære afbildninger II

Eksempel 2 på afbildningsmatrix I

Eksempel 2 på afbildningsmatrix II

Matrixfremstilling for lineære afbildninger II

- ▶ Vi så i Sætning 6.6 at for en given lineær afbildning f og givne baser a og c gælder $K_c(f(v)) = {}_cF_a K_a(v)$ for alle $v \in V$.
- ▶ Omvendt gælder: Hvis der til $f : V \rightarrow W$ findes en matrix F , så $K_c(f(v)) = FK_a(v)$ for alle $v \in V$, så er f lineær og $F = {}_cF_a$.
- ▶ Linearitet: Af $K_c f(v) = FK_a(v)$ følger $f(v) = K_c^{-1}FK_a(v)$. Men højresiden er lineær i v .
- ▶ Videre fås $FK_a(v) = {}_cF_a K_a(v)$ for alle $v \in V$. Heraf følger $F = {}_cF_a$.
- ▶ **Sætning 6.9.** $\nu(f) = \nu({}_cF_a)$ og $\rho(f) = \rho({}_cF_a)$.

Lineære afbildninger

Definition

Eksempel 1 på lineær afbildning

Eksempel 2 på lineær afbildning

Eksempel 3 og 4 på lineær afbildning

Struktursætning mm.

Matrixfremstilling for lineære afbildninger I

Eksempel 1 på afbildningsmatrix

Matrixfremstilling for lineære afbildninger II

Eksempel 2 på afbildningsmatrix I

Eksempel 2 på afbildningsmatrix II

Matrixfremstilling for lineære afbildninger II

- ▶ Vi så i Sætning 6.6 at for en given lineær afbildning f og givne baser a og c gælder $K_c(f(v)) = {}_cF_aK_a(v)$ for alle $v \in V$.
- ▶ Omvendt gælder: Hvis der til $f : V \rightarrow W$ findes en matrix F , så $K_c(f(v)) = FK_a(v)$ for alle $v \in V$, så er f lineær og $F = {}_cF_a$.
- ▶ Linearitet: Af $K_c f(v) = FK_a(v)$ følger $f(v) = K_c^{-1}FK_a(v)$. Men højresiden er lineær i v .
- ▶ Videre fås $FK_a(v) = {}_cF_aK_a(v)$ for alle $v \in V$. Heraf følger $F = {}_cF_a$.
- ▶ Sætning 6.9. $\nu(f) = \nu({}_cF_a)$ og $\rho(f) = \rho({}_cF_a)$.
- ▶ Da $\nu({}_cF_a) + \rho({}_cF_a) = n = \dim V$ er dimensionssætningen $\dim V = \nu(f) + \rho(f)$ bevist.

Lineære afbildninger

Definition

Eksempel 1 på lineær afbildning

Eksempel 2 på lineær afbildning

Eksempel 3 og 4 på lineær afbildning

Struktursætning mm.

Matrixfremstilling for lineære afbildninger I

Eksempel 1 på afbildningsmatrix

Matrixfremstilling for lineære afbildninger II

Eksempel 2 på afbildningsmatrix I

Eksempel 2 på afbildningsmatrix II

Eksempel 2 på afbildningsmatrix I

- ▶ En lineær afbildning f fra V med basen a_1, a_2, a_3 til W med basen b_1, b_2 opfylder

$$f(a_1 + a_2 + 3a_3) = 5b_1 - b_2, \quad f(a_1 - a_2) = 3b_1 + b_2 \text{ og}$$

$$f(a_1 + a_3) = -b_1 + 2b_2$$

Eksempel 2 på afbildningsmatrix I

- ▶ En lineær afbildning f fra V med basen a_1, a_2, a_3 til W med basen b_1, b_2 opfylder

$$f(a_1 + a_2 + 3a_3) = 5b_1 - b_2, \quad f(a_1 - a_2) = 3b_1 + b_2 \text{ og}$$

$$f(a_1 + a_3) = -b_1 + 2b_2$$

- ▶ Vi bestemmer afbildningsmatrixen ${}_bF_a$ for f .

Eksempel 2 på afbildningsmatrix I

- ▶ En lineær afbildning f fra V med basen a_1, a_2, a_3 til W med basen b_1, b_2 opfylder

$$f(a_1 + a_2 + 3a_3) = 5b_1 - b_2, \quad f(a_1 - a_2) = 3b_1 + b_2 \text{ og}$$

$$f(a_1 + a_3) = -b_1 + 2b_2$$

- ▶ Vi bestemmer afbildningsmatricen ${}_bF_a$ for f .
- ▶ Med $v_1 = a_1 + a_2 + 3a_3$, $v_2 = a_1 - 2a_2$ og $v_3 = a_1 + a_3$ har vi

Eksempel 2 på afbildningsmatrix I

- ▶ En lineær afbildning f fra V med basen a_1, a_2, a_3 til W med basen b_1, b_2 opfylder

$$f(a_1 + a_2 + 3a_3) = 5b_1 - b_2, \quad f(a_1 - a_2) = 3b_1 + b_2 \text{ og}$$

$$f(a_1 + a_3) = -b_1 + 2b_2$$

- ▶ Vi bestemmer afbildningsmatricen ${}_bF_a$ for f .
- ▶ Med $v_1 = a_1 + a_2 + 3a_3$, $v_2 = a_1 - 2a_2$ og $v_3 = a_1 + a_3$ har vi
- ▶ Af $K_b(f(v_i)) = {}_bF_a(K_a(v_i))$ med $i = 1, 2, 3$ fås

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = {}_bF_a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = {}_bF_a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = {}_bF_a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lineære
afbildninger

Definition

Eksempel 1 på lineær
afbildningEksempel 2 på lineær
afbildningEksempel 3 og 4 på
lineær afbildning

Struktursætning mm.

Matrixfremstilling for
lineære afbildninger IEksempel 1 på
afbildningsmatrixMatrixfremstilling for
lineære afbildninger IIEksempel 2 på
afbildningsmatrix IEksempel 2 på
afbildningsmatrix II

Eksempel 2 på afbildningsmatrix I

- ▶ En lineær afbildning f fra V med basen a_1, a_2, a_3 til W med basen b_1, b_2 opfylder

$$f(a_1 + a_2 + 3a_3) = 5b_1 - b_2, \quad f(a_1 - a_2) = 3b_1 + b_2 \text{ og}$$

$$f(a_1 + a_3) = -b_1 + 2b_2$$

- ▶ Vi bestemmer afbildningsmatricen ${}_bF_a$ for f .
- ▶ Med $v_1 = a_1 + a_2 + 3a_3$, $v_2 = a_1 - a_2$ og $v_3 = a_1 + a_3$ har vi
- ▶ Af $K_b(f(v_i)) = {}_bF_a(K_a(v_i))$ med $i = 1, 2, 3$ fås

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = {}_bF_a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = {}_bF_a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = {}_bF_a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{▶ Dvs. } {}_bF_a \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Eksempel 2 på afbildningsmatrix II

► Da den inverse til $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ er

$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ får vi derfor, at

$$\begin{aligned} {}_bF_a &= \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -11 & -14 & 10 \\ 6 & 5 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Lineære afbildninger

Definition

Eksempel 1 på lineær
afbildning

Eksempel 2 på lineær
afbildning

Eksempel 3 og 4 på
lineær afbildning

Struktursætning mm.

Matrixfremstilling for
lineære afbildninger I

Eksempel 1 på
afbildningsmatrix

Matrixfremstilling for
lineære afbildninger II

Eksempel 2 på
afbildningsmatrix I

**Eksempel 2 på
afbildningsmatrix II**

Eksempel 2 på afbildningsmatrix II

► Da den inverse til $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ er $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ får vi derfor, at

$$\begin{aligned} {}_bF_a &= \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -11 & -14 & 10 \\ 6 & 5 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

► Ved hjælp af ${}_bF_a$ kan eksempelvis $f(a_1)$ nu bestemmes til $f(a_1) = -11b_1 + 6b_2$.

Lineære afbildninger

Definition

Eksempel 1 på lineær
afbildning

Eksempel 2 på lineær
afbildning

Eksempel 3 og 4 på
lineær afbildning

Struktursætning mm.

Matrixfremstilling for
lineære afbildninger I

Eksempel 1 på
afbildningsmatrix

Matrixfremstilling for
lineære afbildninger II

Eksempel 2 på
afbildningsmatrix I

Eksempel 2 på
afbildningsmatrix II