Funktion af flere variable II Uge 9

Preben Alsholm

Efterår 2010

Funktion af flere variable

Preben Alsholm

Funktion af flere variable

Differentiabilitet for reel funktion af én variabel

Differentiabilitet for reel funktion af flere variable

Partiel differentiation

Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede

Blandede afledede, Tangentplan

Kædereglen

Eksempler på brugen af kædereglen

Bevis for kædereglen

Gradient og niveaukurve

Differentiabilitet for reel funktion af én variabel

- f er *differentiabel* i x, hvis grænseværdien

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

eksisterer. I bekræftende fald kaldes grænseværdien for differentialkvotienten, og den betegnes med $f'(x)$.

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Differentiabilitet for reel funktion af én variabel

- f er *differentiabel* i x, hvis grænseværdien

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

eksisterer. I bekræftende fald kaldes grænseværdien for differentialkvotienten, og den betegnes med $f'(x)$.

- Anderledes sagt: f er differentiabel i x med differentialkvotient a, hvis

$$f(x+h) - f(x) = ah + \varepsilon(h)|h|$$

hvor $\varepsilon(h) \to 0$ for $h \to 0$.

Funktion af flere variable

Differentiabilitet for reel funktion af én variabel

Differentiabilitet for reel funktion af flere variable

Partiel differentiation

Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede

Blandede afledede, Tangentplan

Kædereglen

Eksempler på brugen af kædereglen

Bevis for kædereglen

Gradient og niveaukurve

Differentiabilitet for reel funktion af én variabel

- f er *differentiabel* i x, hvis grænseværdien

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

  eksisterer. I bekræftende fald kaldes grænseværdien for differentialkvotienten, og den betegnes med $f'(x)$.

- Anderledes sagt: f er differentiabel i x med differentialkvotient a, hvis

$$f(x+h) - f(x) = ah + \varepsilon(h)|h|$$

  hvor $\varepsilon(h) \to 0$ for $h \to 0$.

- At f er differentiabel i x betyder altså, at $f(x+h)$ approksimeres godt ved $f(x) + ah$, når $|h|$ er lille.

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Differentiabilitet for reel funktion af flere variable

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og lad $x \in A$ være indre. Lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

Funktion af flere variable

Differentiabilitet for reel funktion af én variabel

Differentiabilitet for reel funktion af flere variable

Partiel differentiation

Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede

Blandede afledede, Tangentplan

Kædereglen

Eksempler på brugen af kædereglen

Bevis for kædereglen

Gradient og niveaukurve

Differentiabilitet for reel funktion af flere variable

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og lad $x \in A$ være indre. Lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.
- f er differentiabel i x hvis der findes $a \in \mathbb{R}^k$ så

$$f(x+h) - f(x) = a \cdot h + \varepsilon(h) \|h\|$$

hvor $\varepsilon(h) \to 0$ for $h \to 0$. (Her er $a \cdot h$ skalarproduktet mellem a og h.)

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Differentiabilitet for reel funktion af flere variable

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og lad $x \in A$ være indre. Lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.
- f er differentiabel i x hvis der findes $a \in \mathbb{R}^k$ så

$$f(x+h) - f(x) = a \cdot h + \varepsilon(h) \|h\|$$

hvor $\varepsilon(h) \to 0$ for $h \to 0$. (Her er $a \cdot h$ skalarproduktet mellem a og h.)

- At f er differentiabel i x betyder altså, at $f(x+h)$ approksimeres godt ved $f(x) + a \cdot h$, når $\|h\|$ er lille.

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Differentiabilitet for reel funktion af flere variable

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og lad $x \in A$ være indre. Lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.
- f er differentiabel i x hvis der findes $a \in \mathbb{R}^k$ så

$$f(x+h) - f(x) = a \cdot h + \varepsilon(h) \|h\|$$

  hvor $\varepsilon(h) \to 0$ for $h \to 0$. (Her er $a \cdot h$ skalarproduktet mellem a og h.)
- At f er differentiabel i x betyder altså, at $f(x+h)$ approksimeres godt ved $f(x) + a \cdot h$, når $\|h\|$ er lille.
- Vektoren a kaldes *gradienten* af f i x og betegnes $\operatorname{grad} f(x)$ eller $\nabla f(x)$.

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Differentiabilitet for reel funktion af flere variable

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og lad $x \in A$ være indre. Lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.
- f er differentiabel i x hvis der findes $a \in \mathbb{R}^k$ så

$$f(x+h) - f(x) = a \cdot h + \varepsilon(h) \|h\|$$

  hvor $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ for $h \rightarrow 0$. (Her er $a \cdot h$ skalarproduktet mellem a og h.)
- At f er differentiabel i x betyder altså, at $f(x+h)$ approksimeres godt ved $f(x) + a \cdot h$, når $\|h\|$ er lille.
- Vektoren a kaldes *gradienten* af f i x og betegnes $\operatorname{grad} f(x)$ eller $\nabla f(x)$.
- Udtrykket $a \cdot h$ betegnes differentialet af f i x. Betegnelse $df(x, h) = h \cdot \nabla f(x)$.

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Differentiabilitet for reel funktion af flere variable

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og lad $x \in A$ være indre. Lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.
- f er differentiabel i x hvis der findes $a \in \mathbb{R}^k$ så

$$f(x+h) - f(x) = a \cdot h + \varepsilon(h) \|h\|$$

hvor $\varepsilon(h) \to 0$ for $h \to 0$. (Her er $a \cdot h$ skalarproduktet mellem a og h.)

- At f er differentiabel i x betyder altså, at $f(x+h)$ approksimeres godt ved $f(x) + a \cdot h$, når $\|h\|$ er lille.
- Vektoren a kaldes *gradienten* af f i x og betegnes $\operatorname{grad} f(x)$ eller $\nabla f(x)$.
- Udtrykket $a \cdot h$ betegnes differentialet af f i x. Betegnelse $df(x,h) = h \cdot \nabla f(x)$.
- Vi har altså $\Delta f = f(x+h) - f(x) = df(x,h) + \varepsilon(h)\|h\| \simeq df(x,h)$ for små $\|h\|$.

Funktion af flere variable

Differentiabilitet for reel funktion af én variabel

Differentiabilitet for reel funktion af flere variable

Partiel differentiation

Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede

Blandede afledede, Tangentplan

Kædereglen

Eksempler på brugen af kædereglen

Bevis for kædereglen

Gradient og niveaukurve

Partiel differentiation

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og lad $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) \in A$. Lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

Funktion af flere variable

Differentiabilitet for reel funktion af én variabel

Differentiabilitet for reel funktion af flere variable

Partiel differentiation

Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede

Blandede afledede, Tangentplan

Kædereglen

Eksempler på brugen af kædereglen

Bevis for kædereglen

Gradient og niveaukurve

Partiel differentiation

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og lad $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) \in A$. Lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.
- Antag, at funktionen $g(t) = f(t, x_2, x_3, \ldots, x_k)$ er defineret i en omegn om x_1.

Funktion af flere variable

Differentiabilitet for reel funktion af én variabel

Differentiabilitet for reel funktion af flere variable

Partiel differentiation

Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede

Blandede afledede, Tangentplan

Kædereglen

Eksempler på brugen af kædereglen

Bevis for kædereglen

Gradient og niveaukurve

Partiel differentiation

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og lad $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) \in A$. Lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.
- Antag, at funktionen $g(t) = f(t, x_2, x_3, \ldots, x_k)$ er defineret i en omegn om x_1.
- Hvis g er differentiabel i x_1, siges f at have en partiel afledet i x mht. førstekoordinaten.

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Partiel differentiation

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og lad $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) \in A$. Lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.
- Antag, at funktionen $g(t) = f(t, x_2, x_3, \ldots, x_k)$ er defineret i en omegn om x_1.
- Hvis g er differentiabel i x_1, siges f at have en partiel afledet i x mht. førstekoordinaten.
- Den partielle afledede $f'_{x_1}(x) = g'(x_1)$. Andre betegnelser: $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ og $D_1 f(x)$.

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Partiel differentiation

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og lad $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) \in A$. Lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.
- Antag, at funktionen $g(t) = f(t, x_2, x_3, \ldots, x_k)$ er defineret i en omegn om x_1.
- Hvis g er differentiabel i x_1, siges f at have en partiel afledet i x mht. førstekoordinaten.
- Den partielle afledede $f'_{x_1}(x) = g'(x_1)$. Andre betegnelser: $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ og $D_1 f(x)$.
- Sætning 1 (p.53). Hvis $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ er differentiabel $x \in A$, så eksisterer alle k partielle afledede og $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\right)$.

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Partiel differentiation

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og lad $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_k) \in A$. Lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.
- Antag, at funktionen $g(t) = f(t, x_2, x_3, \dots, x_k)$ er defineret i en omegn om x_1.
- Hvis g er differentiabel i x_1, siges f at have en partiel afledet i x mht. førstekoordinaten.
- Den partielle afledede $f'_{x_1}(x) = g'(x_1)$. Andre betegnelser: $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ og $D_1 f(x)$.
- Sætning 1 (p.53). Hvis $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ er differentiabel $x \in A$, så eksisterer alle k partielle afledede og $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \right)$.
- Sætning 2 (p.53). Hvis $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ har partielle afledede i en omegn af $x \in A$, og hvis disse er kontinuerte i x, så er f differentiabel i x.

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede

- $f(x, y) = \sin(2x + 3y)$. Vi har da

$$
\begin{aligned}
f'_x(x, y) &= \cos(2x + 3y) \cdot 2 \\
f'_y(x, y) &= \cos(2x + 3y) \cdot 3
\end{aligned}
$$

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede

- $f(x,y) = \sin(2x+3y)$. Vi har da

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \cos(2x+3y)\cdot 2 \\ f'_y(x,y) &= \cos(2x+3y)\cdot 3 \end{aligned}$$

- De nye funktioner f'_x og f'_y har selv partielle afledede:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= \left(f'_x\right)'_x(x,y) = -4\sin(2x+3y) \\ f''_{xy}(x,y) &= \left(f'_x\right)'_y(x,y) = -6\sin(2x+3y) \\ f''_{yx}(x,y) &= \left(f'_y\right)'_x(x,y) = -6\sin(2x+3y) \\ f''_{yy}(x,y) &= \left(f'_y\right)'_y(x,y) = -9\sin(2x+3y) \end{aligned}$$

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Blandede afledede, Tangentplan

- Mængden af funktioner med kontinuerte partielle afledede i A op til og med p'te orden betegnes med $C^p(A)$.

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Blandede afledede, Tangentplan

- Mængden af funktioner med kontinuerte partielle afledede i A op til og med p'te orden betegnes med $C^p(A)$.
- Sætning (p. 67). Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ være åben. Lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ og $f \in C^2(A)$. Så gælder for alle $x \in A$ og alle i, j at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Blandede afledede, Tangentplan

- Mængden af funktioner med kontinuerte partielle afledede i A op til og med p'te orden betegnes med $C^p(A)$.
- Sætning (p. 67). Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ være åben. Lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ og $f \in C^2(A)$. Så gælder for alle $x \in A$ og alle i, j at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Hvis f er differentiabel i $a \in A$ kaldes grafen for det lineære udtryk $f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a)$ for tangentplanen for f i $(a, f(a))$.

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Blandede afledede, Tangentplan

- Mængden af funktioner med kontinuerte partielle afledede i A op til og med p'te orden betegnes med $C^p(A)$.
- Sætning (p. 67). Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ være åben. Lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ og $f \in C^2(A)$. Så gælder for alle $x \in A$ og alle i, j at
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$
- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Hvis f er differentiabel i $a \in A$ kaldes grafen for det lineære udtryk $f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a)$ for tangentplanen for f i $(a, f(a))$.
- Når $k = 2$ er ligningen for tangentplanen i $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ altså
$$\begin{aligned} z &= f(a_1, a_2) + \nabla f(a_1, a_2) \cdot (x_1 - a_1, x_2 - a_2) \\ &= f(a_1, a_2) + f'_{x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2) \end{aligned}$$

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Kædereglen

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ og lad $(x, y) = (X(t), Y(t)), t \in I$, være parameterfremstilling for en kurve, der forløber i A.

Funktion af flere variable

Differentiabilitet for reel funktion af én variabel

Differentiabilitet for reel funktion af flere variable

Partiel differentiation

Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede

Blandede afledede, Tangentplan

Kædereglen

Eksempler på brugen af kædereglen

Bevis for kædereglen

Gradient og niveaukurve

Kædereglen

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ og lad $(x, y) = (X(t), Y(t))$, $t \in I$, være parameterfremstilling for en kurve, der forløber i A.
- Lad $g : I \to \mathbb{R}$ være givet ved $g(t) = f(X(t), Y(t))$ for alle $t \in I$.

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Kædereglen

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ og lad $(x, y) = (X(t), Y(t)), t \in I$, være parameterfremstilling for en kurve, der forløber i A.
- Lad $g : I \to \mathbb{R}$ være givet ved $g(t) = f(X(t), Y(t))$ for alle $t \in I$.
- Antag, at X og Y er differentiable i $t_0 \in I$ og at f er differentiabel i $(x_0, y_0) = (X(t_0), Y(t_0))$ (der antages at være et indre punkt i A).

Funktion af flere variable

Differentiabilitet for reel funktion af én variabel

Differentiabilitet for reel funktion af flere variable

Partiel differentiation

Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede

Blandede afledede, Tangentplan

Kædereglen

Eksempler på brugen af kædereglen

Bevis for kædereglen

Gradient og niveaukurve

Kædereglen

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ og lad $(x, y) = (X(t), Y(t)), t \in I$, være parameterfremstilling for en kurve, der forløber i A.
- Lad $g : I \to \mathbb{R}$ være givet ved $g(t) = f(X(t), Y(t))$ for alle $t \in I$.
- Antag, at X og Y er differentiable i $t_0 \in I$ og at f er differentiabel i $(x_0, y_0) = (X(t_0), Y(t_0))$ (der antages at være et indre punkt i A).
- Så gælder: g er differentiabel i t_0 og $g'(t_0) = f'_x(x_0, y_0) X'(t_0) + f'_y(x_0, y_0) Y'(t_0)$.

Funktion af flere variable

Differentiabilitet for reel funktion af én variabel

Differentiabilitet for reel funktion af flere variable

Partiel differentiation

Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede

Blandede afledede, Tangentplan

Kædereglen

Eksempler på brugen af kædereglen

Bevis for kædereglen

Gradient og niveaukurve

Kædereglen

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ og lad $(x, y) = (X(t), Y(t)), t \in I$, være parameterfremstilling for en kurve, der forløber i A.
- Lad $g : I \to \mathbb{R}$ være givet ved $g(t) = f(X(t), Y(t))$ for alle $t \in I$.
- Antag, at X og Y er differentiable i $t_0 \in I$ og at f er differentiabel i $(x_0, y_0) = (X(t_0), Y(t_0))$ (der antages at være et indre punkt i A).
- Så gælder: g er differentiabel i t_0 og $g'(t_0) = f'_x(x_0, y_0) X'(t_0) + f'_y(x_0, y_0) Y'(t_0)$.
- Anderledes skrevet: $g'(t_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (X'(t_0), Y'(t_0))$.

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Kædereglen

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ og lad $(x, y) = (X(t), Y(t)), t \in I$, være parameterfremstilling for en kurve, der forløber i A.
- Lad $g : I \to \mathbb{R}$ være givet ved $g(t) = f(X(t), Y(t))$ for alle $t \in I$.
- Antag, at X og Y er differentiable i $t_0 \in I$ og at f er differentiabel i $(x_0, y_0) = (X(t_0), Y(t_0))$ (der antages at være et indre punkt i A).
- Så gælder: g er differentiabel i t_0 og $g'(t_0) = f'_x(x_0, y_0) X'(t_0) + f'_y(x_0, y_0) Y'(t_0)$.
- Anderledes skrevet: $g'(t_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (X'(t_0), Y'(t_0))$.
- Endnu en version: $\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dX}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dY}{dt}$ hvor det underforstås hvor de afledede skal evalueres.

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Eksempel på brugen af kædereglen

- Lad $f(x,y) = \left(x + y^2\right) \ln x$ og $X(t) = \cos t$, $Y(t) = \sin t$.

Funktion af flere variable

Differentiabilitet for reel funktion af én variabel

Differentiabilitet for reel funktion af flere variable

Partiel differentiation

Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede

Blandede afledede, Tangentplan

Kædereglen

Eksempler på brugen af kædereglen

Bevis for kædereglen

Gradient og niveaukurve

Eksempel på brugen af kædereglen

- Lad $f(x, y) = \left(x + y^2\right) \ln x$ og $X(t) = \cos t$, $Y(t) = \sin t$.
- Lad $g(t) = f(X(t), Y(t))$ for $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Eksempel på brugen af kædereglen

- Lad $f(x, y) = (x + y^2) \ln x$ og $X(t) = \cos t$, $Y(t) = \sin t$.
- Lad $g(t) = f(X(t), Y(t))$ for $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- Da X og Y er differentiable overalt og f er differentiabel i $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, er g differentiabel i $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Funktion af flere variable

Differentiabilitet for reel funktion af én variabel

Differentiabilitet for reel funktion af flere variable

Partiel differentiation

Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede

Blandede afledede, Tangentplan

Kædereglen

Eksempler på brugen af kædereglen

Bevis for kædereglen

Gradient og niveaukurve

Eksempel på brugen af kædereglen

- Lad $f(x,y) = \left(x+y^2\right)\ln x$ og $X(t) = \cos t$, $Y(t) = \sin t$.
- Lad $g(t) = f(X(t), Y(t))$ for $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- Da X og Y er differentiable overalt og f er differentiabel i $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, er g differentiabel i $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- Vi har $f_x'(x,y) = \ln x + \left(x+y^2\right)\frac{1}{x}$, $f_y'(x,y) = 2y\ln x$, $X'(t) = -\sin t$ og $Y'(t) = \cos t$.

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Eksempel på brugen af kædereglen

- Lad $f(x,y) = \left(x + y^2\right)\ln x$ og $X(t) = \cos t$, $Y(t) = \sin t$.
- Lad $g(t) = f(X(t), Y(t))$ for $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- Da X og Y er differentiable overalt og f er differentiabel i $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, er g differentiabel i $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- Vi har $f_x'(x,y) = \ln x + \left(x + y^2\right)\frac{1}{x}$, $f_y'(x,y) = 2y\ln x$, $X'(t) = -\sin t$ og $Y'(t) = \cos t$.
- Så $g'(t) =$ $f_x'(X(t), Y(t))\,X'(t) + f_y'(X(t), Y(t))\,Y'(t) =$ $\left(\ln X(t) + \left(X(t) + Y(t)^2\right)\frac{1}{X(t)}\right)X'(t) +$ $2Y(t)\ln X(t) \cdot Y'(t)$ $= -\left(\ln\cos t + \left(\cos t + \sin^2 t\right)\frac{1}{\cos t}\right)\sin t +$ $2\sin t\cos t\ln\cos t$

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Eksempel på brugen af kædereglen

- Lad $f(x,y) = \left(x + y^2\right) \ln x$ og $X(t) = \cos t$, $Y(t) = \sin t$.
- Lad $g(t) = f(X(t), Y(t))$ for $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- Da X og Y er differentiable overalt og f er differentiabel i $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, er g differentiabel i $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- Vi har $f'_x(x,y) = \ln x + \left(x + y^2\right) \frac{1}{x}$, $f'_y(x,y) = 2y \ln x$, $X'(t) = -\sin t$ og $Y'(t) = \cos t$.
- Så $g'(t) = f'_x(X(t), Y(t)) X'(t) + f'_y(X(t), Y(t)) Y'(t) = \left(\ln X(t) + \left(X(t) + Y(t)^2\right) \frac{1}{X(t)}\right) X'(t) + 2Y(t) \ln X(t) \cdot Y'(t)$ $= -\left(\ln \cos t + \left(\cos t + \sin^2 t\right) \frac{1}{\cos t}\right) \sin t + 2 \sin t \cos t \ln \cos t$
- Flere eksempler i Maple-worksheet.

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Bevis for kædereglen

- f er differentiabel i (x_0, y_0) så der findes en funktion ε defineret i en cirkelskive K omkring $(0,0)$ og med $\varepsilon(h_1, h_2) \to 0$ for $h = (h_1, h_2) \to (0,0)$ så for $h \in K$:

  $$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot h + \varepsilon(h) \|h\|$$

Funktion af flere variable

Differentiabilitet for reel funktion af én variabel

Differentiabilitet for reel funktion af flere variable

Partiel differentiation

Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede

Blandede afledede, Tangentplan

Kædereglen

Eksempler på brugen af kædereglen

Bevis for kædereglen

Gradient og niveaukurve

Bevis for kædereglen

- f er differentiabel i (x_0, y_0) så der findes en funktion ε defineret i en cirkelskive K omkring $(0,0)$ og med $\varepsilon(h_1, h_2) \to 0$ for $h = (h_1, h_2) \to (0,0)$ så for $h \in K$:
  $$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot h + \varepsilon(h) \|h\|$$
- Med $h = (X(t_0 + \Delta t) - X(t_0), Y(t_0 + \Delta t) - Y(t_0))$ fås nu $g(t_0 + \Delta t) - g(t_0) = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot h + \varepsilon(h) \|h\|$.

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Bevis for kædereglen

- f er differentiabel i (x_0, y_0) så der findes en funktion ε defineret i en cirkelskive K omkring $(0,0)$ og med $\varepsilon(h_1, h_2) \to 0$ for $h = (h_1, h_2) \to (0,0)$ så for $h \in K$:

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot h + \varepsilon(h) \|h\|$$

- Med $h = (X(t_0 + \Delta t) - X(t_0), Y(t_0 + \Delta t) - Y(t_0))$ fås nu $g(t_0 + \Delta t) - g(t_0) = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot h + \varepsilon(h) \|h\|$.
- Heraf følger

$$\frac{g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)}{\Delta t} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \frac{h}{\Delta t} + \varepsilon(h) \left\| \frac{h}{\Delta t} \right\| \frac{|\Delta t|}{\Delta t}$$

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Bevis for kædereglen

- f er differentiabel i (x_0, y_0) så der findes en funktion ε defineret i en cirkelskive K omkring $(0,0)$ og med $\varepsilon(h_1, h_2) \to 0$ for $h = (h_1, h_2) \to (0,0)$ så for $h \in K$:
$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot h + \varepsilon(h) \|h\|$$
- Med $h = (X(t_0 + \Delta t) - X(t_0), Y(t_0 + \Delta t) - Y(t_0))$ fås nu $g(t_0 + \Delta t) - g(t_0) = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot h + \varepsilon(h) \|h\|$.
- Heraf følger
$$\frac{g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)}{\Delta t} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \frac{h}{\Delta t} + \varepsilon(h) \left\| \frac{h}{\Delta t} \right\| \frac{|\Delta t|}{\Delta t}$$
- Men $\frac{h}{\Delta t} = \frac{(X(t_0+\Delta t) - X(t_0), Y(t_0+\Delta t) - Y(t_0))}{\Delta t} \to (X'(t_0), Y'(t_0))$ for $\Delta t \to 0$.

Funktion af flere variable

Differentiabilitet for reel funktion af én variabel

Differentiabilitet for reel funktion af flere variable

Partiel differentiation

Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede

Blandede afledede, Tangentplan

Kædereglen

Eksempler på brugen af kædereglen

Bevis for kædereglen

Gradient og niveaukurve

Bevis for kædereglen

- f er differentiabel i (x_0, y_0) så der findes en funktion ε defineret i en cirkelskive K omkring $(0,0)$ og med $\varepsilon(h_1, h_2) \to 0$ for $h = (h_1, h_2) \to (0,0)$ så for $h \in K$:
$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot h + \varepsilon(h) \|h\|$$
- Med $h = (X(t_0 + \Delta t) - X(t_0), Y(t_0 + \Delta t) - Y(t_0))$ fås nu $g(t_0 + \Delta t) - g(t_0) = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot h + \varepsilon(h) \|h\|$.
- Heraf følger
$$\frac{g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)}{\Delta t} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \frac{h}{\Delta t} + \varepsilon(h) \left\| \frac{h}{\Delta t} \right\| \frac{|\Delta t|}{\Delta t}$$
- Men $\frac{h}{\Delta t} = \frac{(X(t_0+\Delta t) - X(t_0), Y(t_0+\Delta t) - Y(t_0))}{\Delta t} \to (X'(t_0), Y'(t_0))$ for $\Delta t \to 0$.
- Da $\varepsilon(h) = \varepsilon(X(t_0 + \Delta t) - X(t_0), Y(t_0 + \Delta t) - Y(t_0)) \to 0$ for $\Delta t \to 0$, fås, at $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t_0+\Delta t) - g(t_0)}{\Delta t} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (X'(t_0), Y'(t_0))$.

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Gradient og niveaukurve

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ være differentiabel i det indre punkt $(x_0, y_0) \in A$.

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Gradient og niveaukurve

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ være differentiabel i det indre punkt $(x_0, y_0) \in A$.
- Antag, at $\nabla f\,(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Gradient og niveaukurve

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ være differentiabel i det indre punkt $(x_0, y_0) \in A$.
- Antag, at $\nabla f\,(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.
- Niveaukurven for f gennem (x_0, y_0) er givet ved ligningen $f\,(x, y) = f\,(x_0, y_0)$. Med $k = f\,(x_0, y_0)$ altså $f\,(x, y) = k$.

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Gradient og niveaukurve

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ være differentiabel i det indre punkt $(x_0, y_0) \in A$.
- Antag, at $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.
- Niveaukurven for f gennem (x_0, y_0) er givet ved ligningen $f(x, y) = f(x_0, y_0)$. Med $k = f(x_0, y_0)$ altså $f(x, y) = k$.
- Antag, at $(X(t), Y(t))$, $t \in I$, er en parameterfremstilling for $f(x, y) = k$ med $(X(t_0), Y(t_0)) = (x_0, y_0)$ og at X og Y er differentiable i t_0 med $(X'(t_0), Y'(t_0)) \neq (0, 0)$.

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Gradient og niveaukurve

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ være differentiabel i det indre punkt $(x_0, y_0) \in A$.
- Antag, at $\nabla f\,(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.
- Niveaukurven for f gennem (x_0, y_0) er givet ved ligningen $f\,(x, y) = f\,(x_0, y_0)$. Med $k = f\,(x_0, y_0)$ altså $f\,(x, y) = k$.
- Antag, at $(X\,(t)\,, Y\,(t))\,, t \in I$, er en parameterfremstilling for $f\,(x, y) = k$ med $(X\,(t_0)\,, Y\,(t_0)) = (x_0, y_0)$ og at X og Y er differentiable i t_0 med $(X'\,(t_0)\,, Y'\,(t_0)) \neq (0, 0)$.
- Så gælder $f\,(X\,(t)\,, Y\,(t)) = k$ for alle $t \in I$, og dermed $\frac{d}{dt} f\,(X\,(t)\,, Y\,(t)) = 0$ for alle $t \in I$.

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Gradient og niveaukurve

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ være differentiabel i det indre punkt $(x_0, y_0) \in A$.
- Antag, at $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.
- Niveaukurven for f gennem (x_0, y_0) er givet ved ligningen $f(x, y) = f(x_0, y_0)$. Med $k = f(x_0, y_0)$ altså $f(x, y) = k$.
- Antag, at $(X(t), Y(t))$, $t \in I$, er en parameterfremstilling for $f(x, y) = k$ med $(X(t_0), Y(t_0)) = (x_0, y_0)$ og at X og Y er differentiable i t_0 med $(X'(t_0), Y'(t_0)) \neq (0, 0)$.
- Så gælder $f(X(t), Y(t)) = k$ for alle $t \in I$, og dermed $\frac{d}{dt} f(X(t), Y(t)) = 0$ for alle $t \in I$.
- Kædereglen giver så $0 = \frac{d}{dt} f(X(t), Y(t))\Big|_{t=t_0} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (X'(t_0), Y'(t_0))$.

Funktion af flere variable

Differentiabilitet for reel funktion af én variabel

Differentiabilitet for reel funktion af flere variable

Partiel differentiation

Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede

Blandede afledede, Tangentplan

Kædereglen

Eksempler på brugen af kædereglen

Bevis for kædereglen

Gradient og niveaukurve

Gradient og niveaukurve

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ være differentiabel i det indre punkt $(x_0, y_0) \in A$.
- Antag, at $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.
- Niveaukurven for f gennem (x_0, y_0) er givet ved ligningen $f(x, y) = f(x_0, y_0)$. Med $k = f(x_0, y_0)$ altså $f(x, y) = k$.
- Antag, at $(X(t), Y(t)), t \in I$, er en parameterfremstilling for $f(x, y) = k$ med $(X(t_0), Y(t_0)) = (x_0, y_0)$ og at X og Y er differentiable i t_0 med $(X'(t_0), Y'(t_0)) \neq (0, 0)$.
- Så gælder $f(X(t), Y(t)) = k$ for alle $t \in I$, og dermed $\frac{d}{dt} f(X(t), Y(t)) = 0$ for alle $t \in I$.
- Kædereglen giver så $0 = \frac{d}{dt} f(X(t), Y(t))\Big|_{t=t_0} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (X'(t_0), Y'(t_0))$.
- Dvs. at tangentvektoren $(X'(t_0), Y'(t_0))$ til niveaukurven er vinkelret på gradienten.

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve

Gradient og niveaukurve

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ være differentiabel i det indre punkt $(x_0, y_0) \in A$.
- Antag, at $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.
- Niveaukurven for f gennem (x_0, y_0) er givet ved ligningen $f(x, y) = f(x_0, y_0)$. Med $k = f(x_0, y_0)$ altså $f(x, y) = k$.
- Antag, at $(X(t), Y(t)), t \in I$, er en parameterfremstilling for $f(x, y) = k$ med $(X(t_0), Y(t_0)) = (x_0, y_0)$ og at X og Y er differentiable i t_0 med $(X'(t_0), Y'(t_0)) \neq (0, 0)$.
- Så gælder $f(X(t), Y(t)) = k$ for alle $t \in I$, og dermed $\frac{d}{dt} f(X(t), Y(t)) = 0$ for alle $t \in I$.
- Kædereglen giver så $0 = \frac{d}{dt} f(X(t), Y(t))\Big|_{t=t_0} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (X'(t_0), Y'(t_0))$.
- Dvs. at tangentvektoren $(X'(t_0), Y'(t_0))$ til niveaukurven er vinkelret på gradienten.
- Se illustration i Maple-worksheet.

Funktion af flere variable
Differentiabilitet for reel funktion af én variabel
Differentiabilitet for reel funktion af flere variable
Partiel differentiation
Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede
Blandede afledede, Tangentplan
Kædereglen
Eksempler på brugen af kædereglen
Bevis for kædereglen
Gradient og niveaukurve