

Kædereglen

Kædereglen I

Kædereglen II

Taylorpolynomier
for funktion af
flere variableTaylorpolynomium for
funktion af én variabel

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla \text{ I}$$

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla \text{ II}$$

Taylors sætning i 2
variable, generelt nBevis for Taylors
sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2
variable med $n \leq 2$ Eksempel 2: Lokalt
ekstremum IEksempel 2: Lokalt
ekstremum II

DesignMat Uge 10

Funktion af flere variable III

Preben Alsholm

Efterår 2010

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ og lad $(x, y) = (X(t), Y(t))$, $t \in I$, være parameterfremstilling for en kurve, der forløber i A .

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier for funktion af flere variable

Taylorpolynomium for funktion af én variabel

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla I$$

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla II$$

Taylor's sætning i 2 variable, generelt n

Bevis for Taylor's sætning i to variable

Eksempel 1

Taylor's sætning i 2 variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt ekstremum II

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ og lad $(x, y) = (X(t), Y(t))$, $t \in I$, være parameterfremstilling for en kurve, der forløber i A .
- ▶ Lad $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $g(t) = f(X(t), Y(t))$ for alle $t \in I$.

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier
for funktion af
flere variableTaylorpolynomium for
funktion af én variabel

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ IITaylors sætning i 2
variable, generelt n Bevis for Taylors
sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2
variable med $n \leq 2$ Eksempel 2: Lokalt
ekstremum IEksempel 2: Lokalt
ekstremum II

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ og lad $(x, y) = (X(t), Y(t))$, $t \in I$, være parameterfremstilling for en kurve, der forløber i A .
- ▶ Lad $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $g(t) = f(X(t), Y(t))$ for alle $t \in I$.
- ▶ Antag, at X og Y er differentiable i $t_0 \in I$ og at f er differentiable i $(x_0, y_0) = (X(t_0), Y(t_0))$ (der antages at være et indre punkt i A).

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier
for funktion af
flere variableTaylorpolynomium for
funktion af én variabel

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla$$

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla^2$$

Taylors sætning i 2

variable, generelt n

Bevis for Taylors

sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2

variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum II

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ og lad $(x, y) = (X(t), Y(t))$, $t \in I$, være parameterfremstilling for en kurve, der forløber i A .
- ▶ Lad $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $g(t) = f(X(t), Y(t))$ for alle $t \in I$.
- ▶ Antag, at X og Y er differentiable i $t_0 \in I$ og at f er differentiable i $(x_0, y_0) = (X(t_0), Y(t_0))$ (der antages at være et indre punkt i A).
- ▶ Så gælder: g er differentiable i t_0 og $g'(t_0) = f'_x(x_0, y_0) X'(t_0) + f'_y(x_0, y_0) Y'(t_0)$.

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier
for funktion af
flere variableTaylorpolynomium for
funktion af én variabel

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ II

Taylors sætning i 2

variable, generelt n

Bevis for Taylors

sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2

variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum II

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ og lad $(x, y) = (X(t), Y(t))$, $t \in I$, være parameterfremstilling for en kurve, der forløber i A .
- ▶ Lad $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $g(t) = f(X(t), Y(t))$ for alle $t \in I$.
- ▶ Antag, at X og Y er differentiable i $t_0 \in I$ og at f er differentiable i $(x_0, y_0) = (X(t_0), Y(t_0))$ (der antages at være et indre punkt i A).
- ▶ Så gælder: g er differentiable i t_0 og
$$g'(t_0) = f'_x(x_0, y_0) X'(t_0) + f'_y(x_0, y_0) Y'(t_0).$$
- ▶ **Anderledes skrevet:**
$$g'(t_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (X'(t_0), Y'(t_0)).$$

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier for funktion af flere variable

Taylorpolynomium for funktion af én variabel

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla$$

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla$$

Taylors sætning i 2

variable, generelt n

Bevis for Taylors

sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2

variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum II

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ og lad $(x, y) = (X(t), Y(t))$, $t \in I$, være parameterfremstilling for en kurve, der forløber i A .
- ▶ Lad $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $g(t) = f(X(t), Y(t))$ for alle $t \in I$.
- ▶ Antag, at X og Y er differentiable i $t_0 \in I$ og at f er differentiable i $(x_0, y_0) = (X(t_0), Y(t_0))$ (der antages at være et indre punkt i A).
- ▶ Så gælder: g er differentiable i t_0 og $g'(t_0) = f'_x(x_0, y_0) X'(t_0) + f'_y(x_0, y_0) Y'(t_0)$.
- ▶ Anderledes skrevet: $g'(t_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (X'(t_0), Y'(t_0))$.
- ▶ Endnu en version: $\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dX}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dY}{dt}$ hvor det underforstås hvor de afledede skal evalueres.

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier for funktion af flere variable

Taylorpolynomium for funktion af én variabel

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla I$$

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla II$$

Taylors sætning i 2

variable, generelt n

Bevis for Taylors

sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2

variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum II

Kædereglene II

- ▶ Betragt som ovenfor $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier for funktion af flere variable

Taylorpolynomium for
funktion af én variabel

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla \text{ I}$$

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla \text{ II}$$

Taylor's sætning i 2
variable, generelt n

Bevis for Taylor's
sætning i to variable

Eksempel 1

Taylor's sætning i 2
variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt
ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt
ekstremum II

Kædereglene II

- ▶ Betragt som ovenfor $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.
- ▶ Lad nu $(u, v) \mapsto (X(u, v), Y(u, v))$ være en afbildning af $B \subseteq \mathbb{R}^2$ over i A .

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier for funktion af flere variable

Taylorpolynomium for
funktion af én variabel

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla \quad I$$

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla \quad II$$

Taylor's sætning i 2
variable, generelt n

Bevis for Taylor's
sætning i to variable

Eksempel 1

Taylor's sætning i 2
variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt
ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt
ekstremum II

Kædereglene II

- ▶ Betragt som ovenfor $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.
- ▶ Lad nu $(u, v) \mapsto (X(u, v), Y(u, v))$ være en afbildning af $B \subseteq \mathbb{R}^2$ over i A .
- ▶ Lad $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $g(u, v) = f(X(u, v), Y(u, v))$ for alle $(u, v) \in B$.

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier for funktion af flere variable

Taylorpolynomium for funktion af én variabel

Differentialoperatoren $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren $D_h = h \cdot \nabla$ II

Taylor's sætning i 2

variable, generelt n

Bevis for Taylor's

sætning i to variable

Eksempel 1

Taylor's sætning i 2

variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum II

Kædereglen II

- ▶ Betragt som ovenfor $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.
- ▶ Lad nu $(u, v) \mapsto (X(u, v), Y(u, v))$ være en afbildning af $B \subseteq \mathbb{R}^2$ over i A .
- ▶ Lad $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $g(u, v) = f(X(u, v), Y(u, v))$ for alle $(u, v) \in B$.
- ▶ Antag, at X og Y har partielle afledede mht. u i $(u_0, v_0) \in B$ og at f er differentiabel i $(x_0, y_0) = (X(u_0, v_0), Y(u_0, v_0))$ (der antages at være et indre punkt i A).

Kædereglen

Kædereglen I

Kædereglen II

Taylorpolynomier for funktion af flere variable

Taylorpolynomium for funktion af én variabel

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla$$

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla$$

Taylor's sætning i 2

variable, generelt n

Bevis for Taylor's

sætning i to variable

Eksempel 1

Taylor's sætning i 2

variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum II

Kædereglen II

- ▶ Betragt som ovenfor $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.
- ▶ Lad nu $(u, v) \mapsto (X(u, v), Y(u, v))$ være en afbildning af $B \subseteq \mathbb{R}^2$ over i A .
- ▶ Lad $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $g(u, v) = f(X(u, v), Y(u, v))$ for alle $(u, v) \in B$.
- ▶ Antag, at X og Y har partielle afledede mht. u i $(u_0, v_0) \in B$ og at f er differentiabel i $(x_0, y_0) = (X(u_0, v_0), Y(u_0, v_0))$ (der antages at være et indre punkt i A).
- ▶ Så gælder: g har en partiel afledet mht. u i (u_0, v_0) og $g'_u(u_0, v_0) = f'_x(x_0, y_0) X'_u(u_0, v_0) + f'_y(x_0, y_0) Y'_u(u_0, v_0)$.

Kædereglen

Kædereglen I

Kædereglen II

Taylorpolynomier for funktion af flere variable

Taylorpolynomium for funktion af én variabel

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla$$

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla$$

Taylors sætning i 2

variable, generelt n

Bevis for Taylors

sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2

variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum II

Kædereglens II

- ▶ Betragt som ovenfor $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.
- ▶ Lad nu $(u, v) \mapsto (X(u, v), Y(u, v))$ være en afbildning af $B \subseteq \mathbb{R}^2$ over i A .
- ▶ Lad $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $g(u, v) = f(X(u, v), Y(u, v))$ for alle $(u, v) \in B$.
- ▶ Antag, at X og Y har partielle afledede mht. u i $(u_0, v_0) \in B$ og at f er differentiabel i $(x_0, y_0) = (X(u_0, v_0), Y(u_0, v_0))$ (der antages at være et indre punkt i A).
- ▶ Så gælder: g har en partiel afledet mht. u i (u_0, v_0) og $g'_u(u_0, v_0) = f'_x(x_0, y_0) X'_u(u_0, v_0) + f'_y(x_0, y_0) Y'_u(u_0, v_0)$.
- ▶ Anderledes skrevet: $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial u}$.

Kædereglens

Kædereglens I

Kædereglens II

Taylorpolynomier for funktion af flere variable

Taylorpolynomium for funktion af én variabel

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla$$

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla$$

Taylors sætning i 2

variable, generelt n

Bevis for Taylors

sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2

variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum II

Kædereglens II

- ▶ Betragt som ovenfor $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.
- ▶ Lad nu $(u, v) \mapsto (X(u, v), Y(u, v))$ være en afbildning af $B \subseteq \mathbb{R}^2$ over i A .
- ▶ Lad $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $g(u, v) = f(X(u, v), Y(u, v))$ for alle $(u, v) \in B$.
- ▶ Antag, at X og Y har partielle afledede mht. u i $(u_0, v_0) \in B$ og at f er differentiabel i $(x_0, y_0) = (X(u_0, v_0), Y(u_0, v_0))$ (der antages at være et indre punkt i A).
- ▶ Så gælder: g har en partiel afledet mht. u i (u_0, v_0) og $g'_u(u_0, v_0) = f'_x(x_0, y_0) X'_u(u_0, v_0) + f'_y(x_0, y_0) Y'_u(u_0, v_0)$.
- ▶ Anderledes skrevet: $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial u}$.
- ▶ En tilsvarende sætning gælder om $\frac{\partial g}{\partial v}$.

Kædereglens

Kædereglens I

Kædereglens II

Taylorpolynomier for funktion af flere variable

Taylorpolynomium for funktion af én variabel

Differentialoperatoren $D_h = h \cdot \nabla$ IDifferentialoperatoren $D_h = h \cdot \nabla$ IITaylors sætning i 2 variable, generelt n Bevis for Taylors sætning i n variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2 variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt ekstremum II

Kædereglens II

- ▶ Betragt som ovenfor $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.
- ▶ Lad nu $(u, v) \mapsto (X(u, v), Y(u, v))$ være en afbildning af $B \subseteq \mathbb{R}^2$ over i A .
- ▶ Lad $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $g(u, v) = f(X(u, v), Y(u, v))$ for alle $(u, v) \in B$.
- ▶ Antag, at X og Y har partielle afledede mht. u i $(u_0, v_0) \in B$ og at f er differentiabel i $(x_0, y_0) = (X(u_0, v_0), Y(u_0, v_0))$ (der antages at være et indre punkt i A).
- ▶ Så gælder: g har en partiel afledet mht. u i (u_0, v_0) og $g'_u(u_0, v_0) = f'_x(x_0, y_0) X'_u(u_0, v_0) + f'_y(x_0, y_0) Y'_u(u_0, v_0)$.
- ▶ Anderledes skrevet: $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial u}$.
- ▶ En tilsvarende sætning gælder om $\frac{\partial g}{\partial v}$.
- ▶ **Bevis: Kæderegel II følger umiddelbart af Kæderegel I.**

Kædereglens

Kædereglens I

Kædereglens II

Taylorpolynomier for funktion af flere variable

Taylorpolynomium for funktion af én variabel

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ IITaylors sætning i 2 variable, generelt n Bevis for Taylors sætning i t variable

Eksempel 1

Eksempel 2

Lokalt ekstremum I

Lokalt ekstremum II

Taylorpolynomium for funktion af én variabel

- Lad f være n gange differentiabel i intervallet I og lad $x_0 \in I$. Polynomiet

$$\begin{aligned}P_n(x) &= P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k \\&= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 \\&\quad + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n\end{aligned}$$

kaldes det n 'te Taylorpolynomium for f med udviklingspunkt x_0 .

Kædereglen

Kædereglen I

Kædereglen II

Taylorpolynomier
for funktion af
flere variableTaylorpolynomium for
funktion af én variabel

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ IITaylors sætning i 2
variable, generelt n Bevis for Taylors
sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2
variable med $n \leq 2$ Eksempel 2: Lokalt
ekstremum IEksempel 2: Lokalt
ekstremum II

Taylorpolynomium for funktion af én variabel

- Lad f være n gange differentiabel i intervallet I og lad $x_0 \in I$. Polynomiet

$$\begin{aligned}P_n(x) &= P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k \\&= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 \\&\quad + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n\end{aligned}$$

kaldes det n 'te Taylorpolynomium for f med udviklingspunkt x_0 .

- Taylor's formel: Lad f være $n + 1$ gange differentiabel i intervallet I og lad $x_0 \in I$. For givet $x \in I$ findes et tal ξ mellem x_0 og x , så
$$f(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x - x_0)^{n+1}.$$

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier
for funktion af
flere variableTaylorpolynomium for
funktion af én variabel

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ II

Taylor's sætning i 2

variable, generelt n

Bevis for Taylor's

sætning i to variable

Eksempel 1

Taylor's sætning i 2

variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum II

- Vi indfører differentialoperatoren D_h ved $D_h = h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y}$, når $h = (h_1, h_2)$ er en fast vektor, der ikke afhænger af x, y .

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier
for funktion af
flere variableTaylorpolynomium for
funktion af én variabel**Differentialoperatoren** $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ IITaylors sætning i 2
variable, generelt n Bevis for Taylors
sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2
variable med $n \leq 2$ Eksempel 2: Lokalt
ekstremum IEksempel 2: Lokalt
ekstremum II

- ▶ Vi indfører differentialoperatoren D_h ved $D_h = h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y}$, når $h = (h_1, h_2)$ er en fast vektor, der ikke afhænger af x, y .
- ▶ D_h opererer på funktioner af 2 variable på følgende måde $D_h f = h_1 \frac{\partial f}{\partial x} + h_2 \frac{\partial f}{\partial y} = h \cdot \nabla f$.

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier
for funktion af
flere variableTaylorpolynomium for
funktion af én variabel

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ II

Taylors sætning i 2

variable, generelt n

Bevis for Taylors

sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2

variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum II

- ▶ Vi indfører differentialoperatoren D_h ved $D_h = h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y}$, når $h = (h_1, h_2)$ er en fast vektor, der ikke afhænger af x, y .
- ▶ D_h opererer på funktioner af 2 variable på følgende måde $D_h f = h_1 \frac{\partial f}{\partial x} + h_2 \frac{\partial f}{\partial y} = h \cdot \nabla f$.
- ▶ Derfor skrives også $D_h = h \cdot \nabla$.

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier
for funktion af
flere variableTaylorpolynomium for
funktion af én variabel

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ IDifferentialoperatoren
 $D_h = h \cdot \nabla$ IITaylors sætning i 2
variable, generelt nBevis for Taylors
sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2
variable med $n \leq 2$ Eksempel 2: Lokalt
ekstremum IEksempel 2: Lokalt
ekstremum II

- ▶ Vi indfører differentialoperatoren D_h ved $D_h = h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y}$, når $h = (h_1, h_2)$ er en fast vektor, der ikke afhænger af x, y .
- ▶ D_h opererer på funktioner af 2 variable på følgende måde $D_h f = h_1 \frac{\partial f}{\partial x} + h_2 \frac{\partial f}{\partial y} = h \cdot \nabla f$.
- ▶ Derfor skrives også $D_h = h \cdot \nabla$.
- ▶ **Eksempel.** Hvis $h = (3, -2)$, er $D_h = 3 \frac{\partial}{\partial x} - 2 \frac{\partial}{\partial y}$, så

$$D_h (x^3 + xy^2) = 3(3x^2 + y^2) - 2(2xy) = 9x^2 + 3y^2 - 4xy$$

En differentialoperator II

► Videre fås $D_h^2(x^3 + xy^2) = D_h(D_h(x^3 + xy^2)) = D_h(9x^2 + 3y^2 - 4xy) = 3(18x - 4y) - 2(6y - 4x) = 62x - 24y.$

Kædereglen

Kædereglen I

Kædereglen II

Taylorpolynomier for funktion af flere variable

Taylorpolynomium for funktion af én variabel

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla \text{ I}$$

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla \text{ II}$$

Taylor's sætning i 2 variable, generelt n

Bevis for Taylor's sætning i to variable

Eksempel 1

Taylor's sætning i 2 variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt ekstremum II

En differentialoperator II

▶ Videre fås $D_h^2(x^3 + xy^2) = D_h(D_h(x^3 + xy^2)) = D_h(9x^2 + 3y^2 - 4xy) = 3(18x - 4y) - 2(6y - 4x) = 62x - 24y$.

▶ Dette resultat kan også opnås ved først at udregne D_h^2 :

$$D_h^2 = \left(3\frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = 9\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 12\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + 4\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Kædereglen

Kædereglen I

Kædereglen II

Taylorpolynomier
for funktion af
flere variable

Taylorpolynomium for

funktion af én variabel

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ II

Taylors sætning i 2

variable, generelt n

Bevis for Taylors

sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2

variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum II

En differentialoperator II

- ▶ Videre fås $D_h^2 (x^3 + xy^2) = D_h (D_h (x^3 + xy^2)) = D_h (9x^2 + 3y^2 - 4xy) = 3(18x - 4y) - 2(6y - 4x) = 62x - 24y$.

- ▶ Dette resultat kan også opnås ved først at udregne D_h^2 :

$$D_h^2 = \left(3 \frac{\partial}{\partial x} - 2 \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 = 9 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 12 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

- ▶ hvorefter vi udnytter, at $\frac{\partial^2}{\partial x^2} (x^3 + xy^2) = 6x$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (x^3 + xy^2) = 2y$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2} (x^3 + xy^2) = 2x$.

Kædereglen

Kædereglen I

Kædereglen II

Taylorpolynomier
for funktion af
flere variableTaylorpolynomium for
funktion af én variabelDifferentialoperatoren
 $D_h = h \cdot \nabla$ IDifferentialoperatoren
 $D_h = h \cdot \nabla$ IITaylors sætning i 2
variable, generelt nBevis for Taylors
sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2
variable med $n \leq 2$ Eksempel 2: Lokalt
ekstremum IEksempel 2: Lokalt
ekstremum II

En differentialoperator II

- ▶ Videre fås $D_h^2 (x^3 + xy^2) = D_h (D_h (x^3 + xy^2)) = D_h (9x^2 + 3y^2 - 4xy) = 3(18x - 4y) - 2(6y - 4x) = 62x - 24y$.

- ▶ Dette resultat kan også opnås ved først at udregne D_h^2 :

$$D_h^2 = \left(3 \frac{\partial}{\partial x} - 2 \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 = 9 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 12 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

- ▶ hvorefter vi udnytter, at $\frac{\partial^2}{\partial x^2} (x^3 + xy^2) = 6x$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (x^3 + xy^2) = 2y$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2} (x^3 + xy^2) = 2x$.
- ▶ **Altså**
 $D_h^2 (x^3 + xy^2) = 9 \cdot 6x - 12 \cdot 2y + 4 \cdot 2x = 62x - 24y$.

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier
for funktion af
flere variableTaylorpolynomium for
funktion af én variabel

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ II

Taylors sætning i 2

variable, generelt n

Bevis for Taylors

sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2

variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum II

En differentialoperator II

- ▶ Videre fås $D_h^2 (x^3 + xy^2) = D_h (D_h (x^3 + xy^2)) = D_h (9x^2 + 3y^2 - 4xy) = 3(18x - 4y) - 2(6y - 4x) = 62x - 24y$.

- ▶ Dette resultat kan også opnås ved først at udregne D_h^2 :

$$D_h^2 = \left(3 \frac{\partial}{\partial x} - 2 \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 = 9 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 12 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

- ▶ hvorefter vi udnytter, at $\frac{\partial^2}{\partial x^2} (x^3 + xy^2) = 6x$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (x^3 + xy^2) = 2y$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2} (x^3 + xy^2) = 2x$.
- ▶ Altså $D_h^2 (x^3 + xy^2) = 9 \cdot 6x - 12 \cdot 2y + 4 \cdot 2x = 62x - 24y$.
- ▶ D_h^n kan findes ved hjælp af binomialformlen

$$D_h^n = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h_1^k h_2^{n-k} \frac{\partial^n}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$$

Kædereglen

Kædereglen I

Kædereglen II

Taylorpolynomier
for funktion af
flere variable

Taylorpolynomium for

funktion af én variabel

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ II

Taylors sætning i 2

variable, generelt n

Bevis for Taylors

sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2

variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum II

Taylor's sætning i 2 variable, generelt n

- Lad $f \in C^{n+1}(A)$ hvor $A \subset \mathbb{R}^2$ er åben. Lad $a = (a_1, a_2) \in A$ og lad $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ være så lille, at punkterne $a + th, t \in [0, 1]$, alle ligger i A . Lad $x = (x_1, x_2) = a + h$ gælder, at

$$f(x) = f(a) + D_h f(a) + \frac{1}{2} D_h^2 f(a) + \frac{1}{3!} D_h^3 f(a) + \dots + \frac{1}{n!} D_h^n f(a) + \frac{1}{(n+1)!} D_h^{n+1} f(\xi)$$

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier
for funktion af
flere variableTaylorpolynomium for
funktion af én variabel

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ IITaylor's sætning i 2
variable, generelt nBevis for Taylor's
sætning i to variable

Eksempel 1

Taylor's sætning i 2
variable med $n \leq 2$ Eksempel 2: Lokalt
ekstremum IEksempel 2: Lokalt
ekstremum II

Taylor's sætning i 2 variable, generelt n

- Lad $f \in C^{n+1}(A)$ hvor $A \subset \mathbb{R}^2$ er åben. Lad $a = (a_1, a_2) \in A$ og lad $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ være så lille, at punkterne $a + th$, $t \in [0, 1]$, alle ligger i A . Lad $x = (x_1, x_2) = a + h$ gælder, at

$$f(x) = f(a) + D_h f(a) + \frac{1}{2} D_h^2 f(a) + \frac{1}{3!} D_h^3 f(a) + \dots + \frac{1}{n!} D_h^n f(a) + \frac{1}{(n+1)!} D_h^{n+1} f(\xi)$$

- hvor $D_h = h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} = h \cdot \nabla$ og $\xi \in]0, 1[$.

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier
for funktion af
flere variableTaylorpolynomium for
funktion af én variabel

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ II

Taylor's sætning i 2

variable, generelt n

Bevis for Taylor's

sætning i to variable

Eksempel 1

Taylor's sætning i 2

variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum II

Taylor's sætning i 2 variable, generelt n

- Lad $f \in C^{n+1}(A)$ hvor $A \subset \mathbb{R}^2$ er åben. Lad $a = (a_1, a_2) \in A$ og lad $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ være så lille, at punkterne $a + th$, $t \in [0, 1]$, alle ligger i A . Lad $x = (x_1, x_2) = a + h$ gælder, at

$$f(x) = f(a) + D_h f(a) + \frac{1}{2} D_h^2 f(a) + \frac{1}{3!} D_h^3 f(a) + \dots + \frac{1}{n!} D_h^n f(a) + \frac{1}{(n+1)!} D_h^{n+1} f(\xi)$$

- hvor $D_h = h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} = h \cdot \nabla$ og $\xi \in]0, 1[$.
- Det 2. Taylorpolynomium for f er $P_2(x_1, x_2) = f(a) + f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a)(x_2 - a_2) + \frac{1}{2}(f''_{x_1 x_1}(a)(x_1 - a_1)^2 + 2f''_{x_1 x_2}(a)(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) + f''_{x_2 x_2}(a)(x_2 - a_2)^2)$

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier for funktion af flere variable

Taylorpolynomium for funktion af én variabel

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ II

Taylor's sætning i 2

variable, generelt n

Bevis for Taylor's sætning i to variable

Eksempel 1

Eksempel 2

Eksempel 3

Eksempel 4

Eksempel 5

Eksempel 6

Eksempel 7

Eksempel 8

Eksempel 9

Eksempel 10

Bevis for Taylors sætning i to variable

- ▶ Lad $g(t) = f(a + th)$. Så vil g opfylde $g \in C^{n+1}(I)$ i er åbent interval $I \supset [0, 1]$.

Bevis for Taylors sætning i to variable

- ▶ Lad $g(t) = f(a + th)$. Så vil g opfylde $g \in C^{n+1}(I)$ i er åbent interval $I \supset [0, 1]$.
- ▶ Vi bruger Taylors formel for funktion af én variabel på g med udviklingspunkt 0.

Kædereglen

Kædereglen I

Kædereglen II

Taylorpolynomier
for funktion af
flere variable

Taylorpolynomium for
funktion af én variabel

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla I$$

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla II$$

Taylors sætning i 2
variable, generelt n

**Bevis for Taylors
sætning i to variable**

Eksempel 1

Taylors sætning i 2
variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt
ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt
ekstremum II

Bevis for Taylors sætning i to variable

- ▶ Lad $g(t) = f(a + th)$. Så vil g opfylde $g \in C^{n+1}(I)$ i er åbent interval $I \supset [0, 1]$.
- ▶ Vi bruger Taylors formel for funktion af én variabel på g med udviklingspunkt 0.
- ▶ **Kædereglens** giver $g'(t) = f_{x_1}(a + th)h_1 + f_{x_2}(a + th)h_2 = (D_h f)(a + th)$.

Kædereglens

Kædereglens I

Kædereglens II

Taylorpolynomier for funktion af flere variable

Taylorpolynomium for funktion af én variabel

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla$$

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla$$

Taylors sætning i 2 variable, generelt n

Bevis for Taylors sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2 variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt ekstremum II

Bevis for Taylors sætning i to variable

- ▶ Lad $g(t) = f(a + th)$. Så vil g opfylde $g \in C^{n+1}(I)$ i er åbent interval $I \supset [0, 1]$.
- ▶ Vi bruger Taylors formel for funktion af én variabel på g med udviklingspunkt 0.
- ▶ Kædereglen giver $g'(t) = f_{x_1}(a + th)h_1 + f_{x_2}(a + th)h_2 = (D_h f)(a + th)$.
- ▶ Videre fås $g''(t) = \frac{d}{dt}((D_h f)(a + th)) = [D_h(D_h f)](a + th) = (D_h^2 f)(a + th)$, idet resultatet fra før nu bruges på $D_h f$ i stedet for på f .

Kædereglen

Kædereglen I

Kædereglen II

Taylorpolynomier for funktion af flere variable

Taylorpolynomium for funktion af én variabel

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ II

Taylors sætning i 2 variable, generelt n

Bevis for Taylors sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2 variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt ekstremum II

Bevis for Taylors sætning i to variable

- ▶ Lad $g(t) = f(a + th)$. Så vil g opfylde $g \in C^{n+1}(I)$ i er åbent interval $I \supset [0, 1]$.
- ▶ Vi bruger Taylors formel for funktion af én variabel på g med udviklingspunkt 0.
- ▶ Kædereglen giver $g'(t) = f_{x_1}(a + th) h_1 + f_{x_2}(a + th) h_2 = (D_h f)(a + th)$.
- ▶ Videre fås $g''(t) = \frac{d}{dt} ((D_h f)(a + th)) = [D_h (D_h f)](a + th) = (D_h^2 f)(a + th)$, idet resultatet fra før nu bruges på $D_h f$ i stedet for på f .
- ▶ Generelt: $g^{(k)}(t) = (D_h^k f)(a + th)$.

Kædereglen

Kædereglen I

Kædereglen II

Taylorpolynomier for funktion af flere variable

Taylorpolynomium for funktion af én variabel

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ II

Taylors sætning i 2 variable, generelt n

Bevis for Taylors sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2 variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt ekstremum II

Bevis for Taylors sætning i to variable

- ▶ Lad $g(t) = f(a + th)$. Så vil g opfylde $g \in C^{n+1}(I)$ i er åbent interval $I \supset [0, 1]$.
- ▶ Vi bruger Taylors formel for funktion af én variabel på g med udviklingspunkt 0.
- ▶ Kædereglen giver $g'(t) = f_{x_1}(a + th)h_1 + f_{x_2}(a + th)h_2 = (D_h f)(a + th)$.
- ▶ Videre fås $g''(t) = \frac{d}{dt}((D_h f)(a + th)) = [D_h(D_h f)](a + th) = (D_h^2 f)(a + th)$, idet resultatet fra før nu bruges på $D_h f$ i stedet for på f .
- ▶ Generelt: $g^{(k)}(t) = (D_h^k f)(a + th)$.
- ▶ Taylor: $g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(0) + \frac{1}{3!}g'''(0) + \dots + \frac{1}{n!}g^{(n)}(0) + R_n$.

Kædereglen

Kædereglen I

Kædereglen II

Taylorpolynomier for funktion af flere variable

Taylorpolynomium for funktion af én variabel

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ II

Taylors sætning i 2 variable, generelt n

Bevis for Taylors sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2 variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt ekstremum II

Bevis for Taylors sætning i to variable

- ▶ Lad $g(t) = f(a + th)$. Så vil g opfylde $g \in C^{n+1}(I)$ i er åbent interval $I \supset [0, 1]$.
- ▶ Vi bruger Taylors formel for funktion af én variabel på g med udviklingspunkt 0.
- ▶ Kædereglen giver $g'(t) = f_{x_1}(a + th)h_1 + f_{x_2}(a + th)h_2 = (D_h f)(a + th)$.
- ▶ Videre fås $g''(t) = \frac{d}{dt}((D_h f)(a + th)) = [D_h(D_h f)](a + th) = (D_h^2 f)(a + th)$, idet resultatet fra før nu bruges på $D_h f$ i stedet for på f .
- ▶ Generelt: $g^{(k)}(t) = (D_h^k f)(a + th)$.
- ▶ Taylor: $g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(0) + \frac{1}{3!}g'''(0) + \dots + \frac{1}{n!}g^{(n)}(0) + R_n$.
- ▶ hvor $R_n = \frac{1}{(n+1)!}g^{(n+1)}(\xi)$ og $\xi \in]0, 1[$. Hermed følger sætningen umiddelbart.

Kædereglen

Kædereglen I

Kædereglen II

Taylorpolynomier for funktion af flere variable

Taylorpolynomium for funktion af én variabel

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ II

Taylors sætning i 2 variable, generelt n

Bevis for Taylors sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2 variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt ekstremum II

Eksempel 1

- ▶ Lad f være givet ved $f(x, y) = \sin(x + 3y)e^{-x^2}$. Vi finder det 2. Taylorpolynomium ud fra $(0, \frac{\pi}{2})$.

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier for funktion af flere variable

Taylorpolynomium for
funktion af én variabel

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla \text{ I}$$

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla \text{ II}$$

Taylor's sætning i 2
variable, generelt n

Bevis for Taylor's
sætning i to variable

Eksempel 1

Taylor's sætning i 2
variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt
ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt
ekstremum II

Eksempel 1

- ▶ Lad f være givet ved $f(x, y) = \sin(x + 3y)e^{-x^2}$. Vi finder det 2. Taylorpolynomium ud fra $(0, \frac{\pi}{2})$.
- ▶ Vi har

$$f'_x(x, y) = e^{-x^2} (\cos(x + 3y) - 2x \sin(x + 3y))$$

$$f'_y(x, y) = 3e^{-x^2} \cos(x + 3y)$$

$$f''_{xx}(x, y) = e^{-x^2} ((4x^2 - 3) \sin(x + 3y) - 4x \cos(x + 3y))$$

$$f''_{xy}(x, y) = -3e^{-x^2} (\sin(x + 3y) + 2x \cos(x + 3y))$$

$$f''_{yy}(x, y) = -9e^{-x^2} \sin(x + 3y)$$

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier
for funktion af
flere variableTaylorpolynomium for
funktion af én variabel

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

 $D_h^2 = h \cdot \nabla^2$ II

Taylors sætning i 2

variable, generelt n

Bevis for Taylors

sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2

variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum II

Eksempel 1

- ▶ Lad f være givet ved $f(x, y) = \sin(x + 3y)e^{-x^2}$. Vi finder det 2. Taylorpolynomium ud fra $(0, \frac{\pi}{2})$.

- ▶ Vi har

$$f'_x(x, y) = e^{-x^2} (\cos(x + 3y) - 2x \sin(x + 3y))$$

$$f'_y(x, y) = 3e^{-x^2} \cos(x + 3y)$$

$$f''_{xx}(x, y) = e^{-x^2} ((4x^2 - 3) \sin(x + 3y) - 4x \cos(x + 3y))$$

$$f''_{xy}(x, y) = -3e^{-x^2} (\sin(x + 3y) + 2x \cos(x + 3y))$$

$$f''_{yy}(x, y) = -9e^{-x^2} \sin(x + 3y)$$

- ▶ Så $f'_x(0, \frac{\pi}{2}) = 0$, $f'_y(0, \frac{\pi}{2}) = 0$, $f''_{xx}(0, \frac{\pi}{2}) = 3$, $f''_{xy}(0, \frac{\pi}{2}) = 3$, $f''_{yy}(0, \frac{\pi}{2}) = 9$

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier
for funktion af
flere variableTaylorpolynomium for
funktion af én variabel

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ II

Taylors sætning i 2

variable, generelt n

Bevis for Taylors

sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2

variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum II

Eksempel 1

- ▶ Lad f være givet ved $f(x, y) = \sin(x + 3y)e^{-x^2}$. Vi finder det 2. Taylorpolynomium ud fra $(0, \frac{\pi}{2})$.

- ▶ Vi har

$$f'_x(x, y) = e^{-x^2} (\cos(x + 3y) - 2x \sin(x + 3y))$$

$$f'_y(x, y) = 3e^{-x^2} \cos(x + 3y)$$

$$f''_{xx}(x, y) = e^{-x^2} ((4x^2 - 3) \sin(x + 3y) - 4x \cos(x + 3y))$$

$$f''_{xy}(x, y) = -3e^{-x^2} (\sin(x + 3y) + 2x \cos(x + 3y))$$

$$f''_{yy}(x, y) = -9e^{-x^2} \sin(x + 3y)$$

- ▶ Så $f'_x(0, \frac{\pi}{2}) = 0$, $f'_y(0, \frac{\pi}{2}) = 0$, $f''_{xx}(0, \frac{\pi}{2}) = 3$, $f''_{xy}(0, \frac{\pi}{2}) = 3$, $f''_{yy}(0, \frac{\pi}{2}) = 9$
- ▶ Altså har vi, idet også $f(0, \frac{\pi}{2}) = -1$, at

$$\begin{aligned} P_2(x, y) &= -1 + \frac{1}{2} \left(3x^2 + 2 \cdot 3x \left(y - \frac{\pi}{2} \right) + 9 \left(y - \frac{\pi}{2} \right)^2 \right) \\ &= -1 + \frac{3}{2} x^2 + 3x \left(y - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{9}{2} \left(y - \frac{\pi}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier
for funktion af
flere variableTaylorpolynomium for
funktion af én variabel

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ II

Taylors sætning i 2

variable, generelt n

Bevis for Taylors

sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2

variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum II

Taylor's sætning i 2 variable med

$$n \leq 2$$

- ▶ Bemærk, at $P_2(x)$ kan skrives

$$P_2(x) = f(a) + f'_{x_1}(a)h_1 + f'_{x_2}(a)h_2 + \frac{1}{2}h^T H(a)h$$

hvor $H(a)$ er *Hessematrixen*:

$$H(a) = \begin{bmatrix} f''_{x_1x_1}(a) & f''_{x_1x_2}(a) \\ f''_{x_1x_2}(a) & f''_{x_2x_2}(a) \end{bmatrix}$$

Taylors sætning i 2 variable med

$$n \leq 2$$

- Bemærk, at $P_2(x)$ kan skrives

$$P_2(x) = f(a) + f'_{x_1}(a)h_1 + f'_{x_2}(a)h_2 + \frac{1}{2}h^T H(a)h$$

hvor $H(a)$ er *Hessematrixen*:

$$H(a) = \begin{bmatrix} f''_{x_1x_1}(a) & f''_{x_1x_2}(a) \\ f''_{x_1x_2}(a) & f''_{x_2x_2}(a) \end{bmatrix}$$

- Tages $n = 1$ i Taylors sætning fås for $f \in C^2(A)$, at

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + D_h f(a) + \frac{1}{2} (D_h^2 f)(a + \xi h) = \\ &= f(a) + f'_{x_1}(a)h_1 + f'_{x_2}(a)h_2 + \frac{1}{2}h^T H(a + \xi h)h \end{aligned}$$

hvor $\xi \in]0, 1[$.

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier
for funktion af
flere variableTaylorpolynomium for
funktion af én variabel

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ IITaylors sætning i 2
variable, generelt nBevis for Taylors
sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2
variable med $n \leq 2$ Eksempel 2: Lokalt
ekstremum IEksempel 2: Lokalt
ekstremum II

Eksempel 2: Lokalt ekstremum I

- ▶ Lad $a = (a_1, a_2)$. Antag, at grafen for f har vandret tangentplan i a , således at $f'_{x_1}(a) = f'_{x_2}(a) = 0$.

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier for funktion af flere variable

Taylorpolynomium for
funktion af én variabel

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla \text{ I}$$

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla \text{ II}$$

Taylors sætning i 2
variable, generelt n Bevis for Taylors
sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2
variable med $n \leq 2$ **Eksempel 2: Lokalt
ekstremum I**Eksempel 2: Lokalt
ekstremum II

Eksempel 2: Lokalt ekstremum I

- ▶ Lad $a = (a_1, a_2)$. Antag, at grafen for f har vandret tangentplan i a , således at $f'_{x_1}(a) = f'_{x_2}(a) = 0$.
- ▶ Kunne f have et lokalt minimum i a ?

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier for funktion af flere variable

Taylorpolynomium for
funktion af én variabel

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla \text{ I}$$

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla \text{ II}$$

Taylors sætning i 2
variable, generelt n Bevis for Taylors
sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2
variable med $n \leq 2$ **Eksempel 2: Lokalt
ekstremum I**Eksempel 2: Lokalt
ekstremum II

Eksempel 2: Lokalt ekstremum I

- ▶ Lad $a = (a_1, a_2)$. Antag, at grafen for f har vandret tangentplan i a , således at $f'_{x_1}(a) = f'_{x_2}(a) = 0$.
- ▶ Kunne f have et lokalt minimum i a ?
- ▶ Vi udnytter, at

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'_{x_1}(a)h_1 + f'_{x_2}(a)h_2 + \frac{1}{2}h^T H(a + \xi h) h \\ &= f(a) + \frac{1}{2}h^T H(a + \xi h) h \end{aligned}$$

hvor $\xi \in]0, 1[$.

Kædereglen

Kædereglen I

Kædereglen II

Taylorpolynomier
for funktion af
flere variableTaylorpolynomium for
funktion af én variabel

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ IITaylors sætning i 2
variable, generelt n Bevis for Taylors
sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2
variable med $n \leq 2$ **Eksempel 2: Lokalt
ekstremum I**Eksempel 2: Lokalt
ekstremum II

Eksempel 2: Lokalt ekstremum I

- ▶ Lad $a = (a_1, a_2)$. Antag, at grafen for f har vandret tangentplan i a , således at $f'_{x_1}(a) = f'_{x_2}(a) = 0$.
- ▶ Kunne f have et lokalt minimum i a ?
- ▶ Vi udnytter, at

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'_{x_1}(a)h_1 + f'_{x_2}(a)h_2 + \frac{1}{2}h^T H(a + \zeta h) h \\ &= f(a) + \frac{1}{2}h^T H(a + \zeta h) h \end{aligned}$$

hvor $\zeta \in]0, 1[$.

- ▶ **Altså har f lokalt minimum i a , netop hvis $h^T H(a + \zeta h) h \geq 0$ for alle små h .**

Kædereglen

Kædereglen I

Kædereglen II

Taylorpolynomier
for funktion af
flere variableTaylorpolynomium for
funktion af én variabel

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ IITaylors sætning i 2
variable, generelt n Bevis for Taylors
sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2
variable med $n \leq 2$ **Eksempel 2: Lokalt
ekstremum I**Eksempel 2: Lokalt
ekstremum II

Eksempel 2: Lokalt ekstremum I

- ▶ Lad $a = (a_1, a_2)$. Antag, at grafen for f har vandret tangentplan i a , således at $f'_{x_1}(a) = f'_{x_2}(a) = 0$.
- ▶ Kunne f have et lokalt minimum i a ?
- ▶ Vi udnytter, at

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'_{x_1}(a)h_1 + f'_{x_2}(a)h_2 + \frac{1}{2}h^T H(a + \zeta h) h \\ &= f(a) + \frac{1}{2}h^T H(a + \zeta h) h \end{aligned}$$

hvor $\zeta \in]0, 1[$.

- ▶ Altså har f lokalt minimum i a , netop hvis $h^T H(a + \zeta h) h \geq 0$ for alle små h .
- ▶ Hvis $f \in C^2(A)$ og $h^T H(a) h > 0$ for alle $h \neq (0, 0)$ gælder $h^T H(a + \zeta h) h \geq 0$ for alle små h .

Kædereglen

Kædereglen I

Kædereglen II

Taylorpolynomier for funktion af flere variable

Taylorpolynomium for funktion af én variabel

Differentialoperatoren

$D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

$D_h = h \cdot \nabla$ II

Taylor's sætning i 2 variable, generelt n

Bevis for Taylor's sætning i to variable

Eksempel 1

Taylor's sætning i 2 variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt ekstremum II

Eksempel 2: Lokalt ekstremum I

- ▶ Lad $a = (a_1, a_2)$. Antag, at grafen for f har vandret tangentplan i a , således at $f'_{x_1}(a) = f'_{x_2}(a) = 0$.
- ▶ Kunne f have et lokalt minimum i a ?
- ▶ Vi udnytter, at

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'_{x_1}(a)h_1 + f'_{x_2}(a)h_2 + \frac{1}{2}h^T H(a + \zeta h) h \\ &= f(a) + \frac{1}{2}h^T H(a + \zeta h) h \end{aligned}$$

hvor $\zeta \in]0, 1[$.

- ▶ Altså har f lokalt minimum i a , netop hvis $h^T H(a + \zeta h) h \geq 0$ for alle små h .
- ▶ Hvis $f \in C^2(A)$ og $h^T H(a) h > 0$ for alle $h \neq (0, 0)$ gælder $h^T H(a + \zeta h) h \geq 0$ for alle små h .
- ▶ $h^T H(a) h > 0$ for alle $h \neq (0, 0)$ er tilfældet netop når egenverdierne for $H(a)$ begge er positive.

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier for funktion af flere variable

Taylorpolynomium for funktion af én variabel

Differentialoperatoren

$D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

$D_h = h \cdot \nabla$ II

Taylor's sætning i 2 variable, generelt n

Bevis for Taylor's sætning i to variable

Eksempel 1

Taylor's sætning i 2 variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt ekstremum II

Eksempel 2: Lokalt ekstremum II

- I eksempel 1 fandt vi for $f(x, y) = \sin(x + 3y) e^{-x^2}$, at $f'_x(0, \frac{\pi}{2}) = 0$, $f'_y(0, \frac{\pi}{2}) = 0$. Så i punktet $(0, \frac{\pi}{2})$ har grafen for f vandret tangentplan. Punktet er et *stationært* punkt.

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier for funktion af flere variable

Taylorpolynomium for funktion af én variabel

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla I$$

Differentialoperatoren

$$D_h = h \cdot \nabla II$$

Taylors sætning i 2 variable, generelt n

Bevis for Taylors sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2 variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt ekstremum II

Eksempel 2: Lokalt ekstremum II

- ▶ I eksempel 1 fandt vi for $f(x, y) = \sin(x + 3y)e^{-x^2}$, at $f'_x(0, \frac{\pi}{2}) = 0$, $f'_y(0, \frac{\pi}{2}) = 0$. Så i punktet $(0, \frac{\pi}{2})$ har grafen for f vandret tangentplan. Punktet er et *stationært* punkt.
- ▶ **Desuden fandt vi**
 $f''_{xx}(0, \frac{\pi}{2}) = 3$, $f''_{xy}(0, \frac{\pi}{2}) = 3$, $f''_{yy}(0, \frac{\pi}{2}) = 9$.

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier
for funktion af
flere variableTaylorpolynomium for
funktion af én variabel

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ II

Taylors sætning i 2

variable, generelt n

Bevis for Taylors

sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2

variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum II

Eksempel 2: Lokalt ekstremum II

- ▶ I eksempel 1 fandt vi for $f(x, y) = \sin(x + 3y)e^{-x^2}$, at $f'_x(0, \frac{\pi}{2}) = 0$, $f'_y(0, \frac{\pi}{2}) = 0$. Så i punktet $(0, \frac{\pi}{2})$ har grafen for f vandret tangentplan. Punktet er et *stationært* punkt.
- ▶ Desuden fandt vi $f''_{xx}(0, \frac{\pi}{2}) = 3$, $f''_{xy}(0, \frac{\pi}{2}) = 3$, $f''_{yy}(0, \frac{\pi}{2}) = 9$.
- ▶ Hessematrixen $H(0, \frac{\pi}{2})$ er givet ved

$$H\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} f''_{xx}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) & f''_{xy}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ f''_{xy}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) & f''_{yy}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier
for funktion af
flere variableTaylorpolynomium for
funktion af én variabel

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ II

Taylors sætning i 2

variable, generelt n

Bevis for Taylors

sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2

variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum II

Eksempel 2: Lokalt ekstremum II

- ▶ I eksempel 1 fandt vi for $f(x, y) = \sin(x + 3y)e^{-x^2}$, at $f'_x(0, \frac{\pi}{2}) = 0$, $f'_y(0, \frac{\pi}{2}) = 0$. Så i punktet $(0, \frac{\pi}{2})$ har grafen for f vandret tangentplan. Punktet er et *stationært* punkt.
- ▶ Desuden fandt vi $f''_{xx}(0, \frac{\pi}{2}) = 3$, $f''_{xy}(0, \frac{\pi}{2}) = 3$, $f''_{yy}(0, \frac{\pi}{2}) = 9$.
- ▶ Hessematrixen $H(0, \frac{\pi}{2})$ er givet ved

$$H\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} f''_{xx}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) & f''_{xy}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ f''_{xy}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) & f''_{yy}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

- ▶ Karakterpolynomiet er $\det(H - \lambda I) = \lambda^2 - 12\lambda + 18$.

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier
for funktion af
flere variableTaylorpolynomium for
funktion af én variabel

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ II

Taylors sætning i 2

variable, generelt n

Bevis for Taylors

sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2

variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum II

Eksempel 2: Lokalt ekstremum II

- ▶ I eksempel 1 fandt vi for $f(x, y) = \sin(x + 3y)e^{-x^2}$, at $f'_x(0, \frac{\pi}{2}) = 0$, $f'_y(0, \frac{\pi}{2}) = 0$. Så i punktet $(0, \frac{\pi}{2})$ har grafen for f vandret tangentplan. Punktet er et *stationært* punkt.
- ▶ Desuden fandt vi $f''_{xx}(0, \frac{\pi}{2}) = 3$, $f''_{xy}(0, \frac{\pi}{2}) = 3$, $f''_{yy}(0, \frac{\pi}{2}) = 9$.
- ▶ Hessematrixen $H(0, \frac{\pi}{2})$ er givet ved

$$H\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} f''_{xx}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) & f''_{xy}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ f''_{xy}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) & f''_{yy}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

- ▶ Karakterpolynomiet er $\det(H - \lambda I) = \lambda^2 - 12\lambda + 18$.
- ▶ **Egenverdierne for $H(0, \frac{\pi}{2})$ er dermed $6 \pm 3\sqrt{2}$.**

Kædereglen

Kædereglen I

Kædereglen II

Taylorpolynomier
for funktion af
flere variableTaylorpolynomium for
funktion af én variabel

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ II

Taylors sætning i 2

variable, generelt n

Bevis for Taylors

sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2

variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum II

Eksempel 2: Lokalt ekstremum II

- ▶ I eksempel 1 fandt vi for $f(x, y) = \sin(x + 3y)e^{-x^2}$, at $f'_x(0, \frac{\pi}{2}) = 0$, $f'_y(0, \frac{\pi}{2}) = 0$. Så i punktet $(0, \frac{\pi}{2})$ har grafen for f vandret tangentplan. Punktet er et *stationært* punkt.
- ▶ Desuden fandt vi $f''_{xx}(0, \frac{\pi}{2}) = 3$, $f''_{xy}(0, \frac{\pi}{2}) = 3$, $f''_{yy}(0, \frac{\pi}{2}) = 9$.
- ▶ Hessematricen $H(0, \frac{\pi}{2})$ er givet ved

$$H\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} f''_{xx}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) & f''_{xy}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ f''_{xy}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) & f''_{yy}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

- ▶ Karakterpolynomiet er $\det(H - \lambda I) = \lambda^2 - 12\lambda + 18$.
- ▶ Egenverdierne for $H(0, \frac{\pi}{2})$ er dermed $6 \pm 3\sqrt{2}$.
- ▶ Da begge er positive har f lokalt minimum i $(0, \frac{\pi}{2})$.

Kædereglene

Kædereglene I

Kædereglene II

Taylorpolynomier for funktion af flere variable

Taylorpolynomium for funktion af én variabel

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ I

Differentialoperatoren

 $D_h = h \cdot \nabla$ II

Taylors sætning i 2

variable, generelt n

Bevis for Taylors

sætning i to variable

Eksempel 1

Taylors sætning i 2

variable med $n \leq 2$

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum I

Eksempel 2: Lokalt

ekstremum II