DesignMat Ugeseddel 2
Lineære afbildninger

Institut for Matematik

Efterår 2010

1 Forberedelse

Eksemplerne 6.3, 6.4, 6.6 i Lineær Algebra, kapitel 6.

2 Aktiviteter mandag 13–17

2.1 Forelæsning

Emner fra LA, kapitel 6, afsnit 6.1 - 6.2. Se også afsnit 5.3 i Analyse 1.

- Definition på lineær afbildning $f : V \to W$. Billedrum: $f(V)$ og kerne: $\ker f$ for den lineære afbildning f.
- Afbildningsmatricen ${}_cF_a$ for lineær afbildning mht. basis a i V og basis c i W (sætning 6.6 og sætning 6.7).

2.2 Øvelser

Bemærkning 1 *Øvelse 1c og øvelse 4 bruger det lidt kluntet udseende $f(x)(t)$. Her bliver afbildningen f anvendt på funktionen x. Resultatet $f(x)$ er selv en funktion, og $f(x)(t)$ betyder altså $f(x)$ anvendt på t. Denne skrivemåde kender vi fra Maple, hvor vi ved løsning af differentialligninger af 2. orden med begyndelsesbetingelser har set, at eksempelvis $x'(7) = 13$ skal skrives $D(x)(7) = 13$.*

Bemærkning 2 *I øvelse 2 derimod betragtes polynomierne ikke som funktioner i den generelle forstand, men som udtryk, der indeholder en variabel x. Derfor bruges i den øvelse skrivemåden $f(P(x))$.*

1. Undersøg, om følgende afbildninger er lineære, og angiv i givet fald deres kerne. Regn i hånden!

   (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, givet ved $f(x) = x_1 + x_2 + x_3$ for alle $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

   (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, givet ved $f(x) = x_1 + x_2^2 + x_3^3$ for alle $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

   (c) $f : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$, givet ved $f(x)(t) = x'(t) + 2tx(t)$ for alle $x \in C^1(\mathbb{R})$ og $t \in \mathbb{R}$.

   (d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, givet ved $f(x) = ax + b$ for alle $x \in \mathbb{R}$, hvor a og b er reelle konstanter og $b \neq 0$.

   (e) $f : C^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, givet ved $f(x) = x(t_0)$ for alle $x \in C^0(\mathbb{R})$, hvor t_0 er et givet reelt tal.
   Vink: Summen af to funktioner som eksempelvis sin og cos, altså $\sin + \cos$ *defineres* ved $(\sin + \cos)(t) = \sin(t) + \cos(t)$ for alle t. Tilsvarende *defineres* funktionen $7\sin$ ved $(7\sin)(t) = 7\sin(t)$ for alle t.

2. (*E2*) [1] Regn opgave LA 6.30. Regn i hånden!
3. (*E2*) Lad $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ være givet ved

$$f(x) = (x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4, 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4, 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4)$$

for alle $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Regn følgende i hånden, men kontrollér i Maple, hvor det giver mening.

   (a) Vis, at f er lineær og angiv afbildningsmatricen F for f mht. de sædvanlige (de kanoniske) baser i $\mathbb{R}^4$ og $\mathbb{R}^3$.
   (b) Find billedrummets dimension og angiv en basis for billedrummet.
   (c) Angiv en basis for afbildningens kerne.

4. Lad afbildningen $f : C^0(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ være givet ved

$$f(x)\,(t) = \int_0^\pi x(t-s)s\,ds$$

for alle $t \in \mathbb{R}$ og alle $x \in C^0(\mathbb{R})$. Regn følgende i hånden, men brug gerne Maple til integrationerne.

   (a) Vis, at f er lineær.
   (b) Vis, at underrummet U udspændt af basen $(1, \cos, \sin, \exp)$ ved f afbildes ind i sig selv.
   (c) Angiv afbildningsmatricen for $f : U \to U$ med hensyn til den angivne basis.

5. (*E2*) Lad (e_1, e_2) være den sædvanlige (kanoniske) basis for $\mathbb{R}^2$ og (c_1, c_2, c_3, c_4) en given basis for $\mathbb{R}^4$. Om afbildningen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ oplyses, at den er lineær, og at

$$f(e_1) = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \quad \text{og} \quad f(e_2) = c_1 - 3c_3 + 7c_4$$

   (a) Angiv afbildningsmatricen ${}_cF_e$ for f med hensyn til baserne (e_1, e_2) og (c_1, c_2, c_3, c_4).
   (b) Løs den lineære ligning $f(x) = 5c_1 + 3c_2 - 3c_3 + 17c_4$. Regn i hånden.

3 Ugens Mapleprocedurer

- NullSpace
- ColumnSpace
- Basis

4 Hjemmeopgaver

Hjemmeopgaverne er opgaver, der regnes uden for øvelsestiden. Dette betyder, at man ikke skal forvente hjælp i øvelsestiden til disse opgaver. Hjælp til øvelsesopgaverne har første prioritet.

1. (*E2*) LA 6.4. Regn i hånden, men kontrollér i Maple, hvor det giver mening.
2. (*E2*) LA 6.1. Regn i hånden, men kontrollér i Maple, hvor det giver mening.
3. (*E2*) LA 6.15. Regn i Maple!

[1] Opgaver markeret med E2 er opgaver af en type, der vil egne sig til 2-timersprøven i december. Ved 2-timersprøven vil evt. bemærkninger om Maple dog være fjernet.

5 Afleveringsopgaver

Visse af hjemmeopgaverne og visse af øvelsesopgaverne skal afleveres. Der afleveres opgaver 3 gange pr. semester. Datoerne for afleveringerne fremgår af hjemmesiden. Hvilke opgaver, der skal afleveres, vil blive offentliggjort på hjemmesiden 6 dage før afleveringstidspunktet.

Om afleveringen

1. Sørg for allerede fra starten at skrive forklaringer sammen med beregninger. Dette vil lette afpudsningen, når det via hjemmesiden oplyses, hvilke af opgaverne, der skal afleveres.
2. Brug både Maple og håndregning. Det er vigtigt, at svar altid kontrolleres. Hertil er Maple et fortrinligt hjælpemiddel. Regnefejl bør af den grund slet ikke forekomme.
3. Mellemregninger skal altid angives og forklaringer anføres. Også i et Maple-worksheet skal skrives forklarende tekst mellem udregningerne.
4. Undgå *Cut and Paste* i Maple: Gem i stedet resultater, der skal bruges senere, i en variabel.
5. **Vi *insisterer* i kurset på, at man bruger Maple notation i input og arbejder i worksheet mode.**