DesignMat Ugeseddel 3
Egenværdiproblemet for lineære afbildninger

Institut for Matematik

Efterår 2010

1 Forberedelse

Eksempel LA 7.2, 7.3 og 7.5. Se også uge 6 fra foråret, hvor matrixegenværdiproblemet blev behandlet.

2 Aktiviteter mandag 13–17

2.1 Forelæsning

Emner fra LA 7.1, 7.2.

- Definition 7.1 af egenværdi og egenvektor for en lineær afbildning.
- Forbindelsen til matrixegenværdiproblemet.
- Begreberne algebraisk og geometrisk multiplicitet.
- Gensyn med sætningerne 7.8, 7.9, 7.10.

2.2 Øvelser

1. Givet matricen $A = \begin{bmatrix} 2 & -12 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -16 & 7 \end{bmatrix}$.

   (a) Find egenværdierne for A og angiv deres algebraiske og geometriske multipliciteter. Håndregning med Maplekontrol.

   (b) Besvar samme spørgsmål for matricen $B = \begin{bmatrix} 38 & -20 & -15 \\ 0 & 3 & 0 \\ 84 & -48 & -33 \end{bmatrix}$, men brug nu gerne udelukkende Maple.

   (c) Matricen A opfattes nu som afbildningsmatrix for en lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mht. den sædvanlige basis for $\mathbb{R}^3$ (den kanoniske basis for $\mathbb{R}^3$). Findes der en basis således at afbildningsmatricen mht. denne basis er en diagonalmatrix? Hvad står der i givet fald i diagonalen?

   (d) Besvar samme spørgsmål for matricen B.

2. Opgave LA 7.3. (*Reduktionsdeterminanten* for matricen A er det samme som det karakteristiske polynomium, altså $\det(A - \lambda I)$.)

3. Lad matricerne A og B være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

   (a) Find egenværdier og egenvektorer for A og B. Angiv for begges vedkommende den algebraiske og den geometriske multiplicitet. Brug håndregning med Maplekontrol.

   (b) Udregn $(A-5I)^2$ og $(B-5I)^2$. Brug håndregning med Maplekontrol.

   (c) To matricer A og B kaldes *similære*, hvis der findes en invertibel matrix V, så $B = V^{-1}AV$. Vis, at vore to matricer A og B ikke er similære. Vink: Antag, at $B = V^{-1}AV$. Vis, at så gælder $(B-5I)^2 = V^{-1}(A-5I)^2 V$.
   (Det ses af dette eksempel, at det *ikke* er tilstrækkeligt for similaritet af to matricer A og B, at de har samme egenværdier med de samme algebraiske og geometriske multipliciteter).

4. Lad A være matricen

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 10 & 16 & 6 \\ -10 & -13 & -3 \end{bmatrix}$$

   (a) Find egenværdier og egenvektorer for A. Brug Maple. Bemærk, at der er én reel egenværdi og to imaginære $\mu \pm i\nu$.

   (b) Angiv en diagonalmatrix Λ og en diagonaliserende matrix V for A. (Dvs. der skal gælde $V^{-1}AV = \Lambda$.)

   (c) Dan en matrix U, hvis første søjle er en egenvektor hørende til den reelle egenværdi og hvis anden og tredie søjle er henholdsvis real- og imaginærdelen af en egenvektor hørende til egenværdien $\mu + i\nu$.

   (d) Udregn $U^{-1}AU$. Resultatet er dén reelle matrix, der er tættest på at være en diagonalmatrix, når der er imaginære egenværdier. Metoden er generel.

3 Ugens Mapleprocedurer

- Eigenvectors
- Re og Im

4 Hjemmeopgaver

1. Lad A være matricen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -4 \\ -15 & -2 & -10 & 6 \\ 7 & 5 & 8 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

   Besvar de samme spørgsmål som i øvelse 4, men med de nødvendige modifikationer. Brug frit Maple.

2. (*E2*)[1] LA 7.9. Håndregning.

[1] Opgaver markeret med E2 er opgaver af en type, der vil egne sig til 2-timersprøven i december. Ved 2-timersprøven vil evt. bemærkninger om Maple dog være fjernet.

5 Afleveringsopgaver

Visse af hjemmeopgaverne og visse af øvelsesopgaverne skal afleveres. Der afleveres opgaver 3 gange pr. semester. Datoerne for afleveringerne fremgår af hjemmesiden. Hvilke opgaver, der skal afleveres, vil blive offentliggjort på hjemmesiden 6 dage før afleveringstidspunktet.

Om afleveringen

1. Sørg for allerede fra starten at skrive forklaringer sammen med beregninger. Dette vil lette afpudsningen, når det via hjemmesiden oplyses, hvilke af opgaverne, der skal afleveres.

2. Brug både Maple og håndregning. Det er vigtigt, at svar altid kontrolleres. Hertil er Maple et fortrinligt hjælpemiddel. Regnefejl bør af den grund slet ikke forekomme.

3. Mellemregninger skal altid angives og forklaringer anføres. Også i et Maple-worksheet skal skrives forklarende tekst mellem udregningerne.

4. Undgå *Cut and Paste* i Maple: Gem i stedet resultater, der skal bruges senere, i en variabel.

5. **Vi *insisterer* i kurset på, at man bruger Maple notation i input og arbejder i worksheet mode.**