DesignMat Ugeseddel 5
Systemer af lineære differentialligninger II

Institut for Matematik

Efterår 2010

1 Forberedelse

Repetér LA 7.4.

2 Aktiviteter mandag 13–17

2.1 Forelæsning

LA 7.4 (pp. 213-215) og LA 7.5 Sætning 7.19 (p.218).

- Inhomogene systemer af lineære differentialligninger. Struktursætningen.
- Omformning af en n'te ordens lineær differentialligning til et system af 1. ordens differentialligninger.
- Numerisk løsning af differentialligningssystem vha. Maple
- Cayley-Hamiltons sætning og det minimale polynomium.

2.2 Øvelser

1. (*E2*)[1] Givet differentialligningen

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \tag{1}$$

   (a) Find den fuldstændige løsning til (1) ved håndkraft.

   (b) Omskriv ved håndkraft (1) til et differentialligningssystem af første orden med $x_1 = y$ og $x_2 = y'$.

   (c) Find den fuldstændige løsning til førsteordenssystemet ved egenværdimetoden.

2. (*E2*) Find ved brug af egenværdimetoden den fuldstændige løsning til det inhomogene differentialligningssystem $\dot{x} = Ax + b$, hvor

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ og } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. (*E2*) Find ved brug af egenværdimetoden den fuldstændige løsning til det inhomogene differentialligningssystem $\dot{x} = Ax + b$, hvor

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ og } b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

[1] Opgaver markeret med E2 er opgaver af en type, der vil egne sig til 2-timersprøven i december. Ved 2-timersprøven vil evt. bemærkninger om Maple dog være fjernet.

4. (*E2*) Der er givet det inhomogene differentialligningssystem $\dot{x} = Ax + b(t)$, hvor

$$A = \begin{bmatrix} -20 & 0 & -24 \\ 0 & -2 & 0 \\ 18 & 0 & 22 \end{bmatrix} \text{ og } b(t) = \begin{bmatrix} 16t \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   (a) Find ved brug af egenværdimetoden den fuldstændige løsning til det homogene system $\dot{x} = Ax$.

   (b) Find en partikulær løsning af formen $x(t) = u + tv$, hvor u og v er konstante vektorer.

   (c) Angiv den fuldstændige løsning til det inhomogene system $\dot{x} = Ax + b(t)$.

5. Betragt systemet $\dot{x} = A(t)x + b$, hvor

$$A(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ og } b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   Bemærk, at egenværdimetoden ikke kan bruges, da matricen $A(t)$ afhænger af t. Løs systemet numerisk med begyndelsesbetingelsen $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ vha. Maple. Tegn graferne for x_1 og x_2 i samme koordinatsystem på t-intervallet $[0, 50]$.

3 Ugens Mapleprocedurer

- Eigenvectors
- dsolve

4 Hjemmeopgaver

1. Givet differentialligningen

$$y''' - 3y'' - 6y' + 8y = 8e^{2t} \tag{2}$$

   (a) Find den fuldstændige løsning til (2) ved brug af Maple.

   (b) Omskriv ved håndkraft (2) til et differentialligningssystem af første orden $\dot{x} = Ax + b(t)$ med $x_1 = y, x_2 = y'$ og $x_3 = y''$.

   (c) Find egenværdier og egenvektorer for systemmatricen A vha. Maple.

   (d) Angiv på basis af 1c den fuldstændige løsning til det homogene system $\dot{x} = Ax$.

   (e) Find en partikulær løsning af formen $x(t) = e^{2t}u$, hvor u er en konstant vektor.

   (f) Angiv den fuldstændige løsning til det inhomogene system $\dot{x} = Ax + b(t)$.

5 Afleveringsopgaver

Visse af hjemmeopgaverne og visse af øvelsesopgaverne skal afleveres. Der afleveres opgaver 3 gange pr. semester. Datoerne for afleveringerne fremgår af hjemmesiden. Hvilke opgaver, der skal afleveres, vil blive offentliggjort på hjemmesiden 6 dage før afleveringstidspunktet.

Om afleveringen

1. Sørg for allerede fra starten at skrive forklaringer sammen med beregninger. Dette vil lette afpudsningen, når det via hjemmesiden oplyses, hvilke af opgaverne, der skal afleveres.

2. Brug både Maple og håndregning. Det er vigtigt, at svar altid kontrolleres. Hertil er Maple et fortrinligt hjælpemiddel. Regnefejl bør af den grund slet ikke forekomme.

3. Mellemregninger skal altid angives og forklaringer anføres. Også i et Maple-worksheet skal skrives forklarende tekst mellem udregningerne.

4. Undgå *Cut and Paste* i Maple: Gem i stedet resultater, der skal bruges senere, i en variabel.

5. **Vi *insisterer* i kurset på, at man bruger Maple notation i input og arbejder i worksheet mode.**