DesignMat Ugeseddel 6
Symmetriske og ortogonale matricer

Institut for Matematik

Efterår 2010

1 Forberedelse

LA Eksempel 8.16 og 8.11.

2 Aktiviteter mandag 13–17

2.1 Forelæsning

Emner fra LA, Kapitel 8 (Eksempel 8.5, Gram-Schmidt ortonormalisering. Definitionerne 8.11, 8.12 og 8.18. Sætningerne 8.15, 8.19, 8.20, 8.21, 8.28, 8.29, 8.33, 8.34 og 8.42).

- Det sædvanlige skalarprodukt i $\mathbb{R}^n$.
- Symmetriske og ortogonale matricer.
- Gram-Schmidt ortogonalisering.
- Hovedsætning om symmetriske matricer: sætning 8.33.
- Positiv og negativ definite matricer.
- Kvadratisk form.

2.2 Øvelser

1. Vis ved håndkraft, at vektorerne $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ udgør en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$. Kontrollér resultatet i Maple ved at danne matricen Q med de 3 vektorer som søjler og derefter udregne $Q^T Q$.
2. LA 8.20. Brug gerne Maple.
3. Undersøg hvilke af følgende matricer, der er ortogonale.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ C = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},\ D = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4. (*E2*)[1] Lad $u_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix}$ og $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$. Om 3×3-matricen A oplyses, at den er symmetrisk, at $Au_1 = -u_1$, at u_2 er egenvektor for A, og at 2 er egenværdi for A.
   Brug gerne Maple ved besvarelsen af følgende:

[1] Opgaver markeret med E2 er opgaver af en type, der vil egne sig til 2-timersprøven i december. Ved 2-timersprøven vil evt. bemærkninger om Maple dog være fjernet.

(a) Find samtlige egenvektorer hørende til egenværdien 2.
(b) Find A. Vink: $A = Q\Lambda Q^T$.

5. (*E2*) LA 8.42. Brug gerne Maple.

6. (*E2*) LA 10.39. Brug gerne Maple.

3 Ugens Mapleprocedurer

- DotProduct
- Norm, normalize
- Eigenvectors
- GramSchmidt

4 Hjemmeopgaver

1. (*E2*) LA 8.34. Brug gerne Maple.

2. Lad den kvadratiske form $K(x, y, z)$ være givet ved

$$K(x, y, z) = x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 2axy - 2xz$$

for alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Her er a en reel konstant.

(a) Skriv $K(x, y, z)$ på formen $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, hvor A er en symmetrisk 3×3-matrix.

(b) Plot egenværdierne for A som funktion af a ved brug af Maplekommandoen `plot(Eigenvalues(A),a=-3.` Udnyt plottet til tilnærmelsesvist at bestemme et a-interval for hvilket $K(x, y, z)$ er positiv definit.

(c) Brug *Sylvesters kriterium* (LA p. 264, Sætning 8.39) til præcist at finde de værdier af a for hvilke $K(x, y, z)$ er positiv definit. (Brug gerne Maple).

(d) Afprøv også *Determinant-kriteriet* (LA p. 264, Sætning 8.40). (Brug gerne Maple).

5 Afleveringsopgaver

Visse af hjemmeopgaverne og visse af øvelsesopgaverne skal afleveres. Der afleveres opgaver 3 gange pr. semester. Datoerne for afleveringerne fremgår af hjemmesiden. Hvilke opgaver, der skal afleveres, vil blive offentliggjort på hjemmesiden 6 dage før afleveringstidspunktet.

Om afleveringen

1. Sørg for allerede fra starten at skrive forklaringer sammen med beregninger. Dette vil lette afpudsningen, når det via hjemmesiden oplyses, hvilke af opgaverne, der skal afleveres.

2. Brug både Maple og håndregning. Det er vigtigt, at svar altid kontrolleres. Hertil er Maple et fortrinligt hjælpemiddel. Regnefejl bør af den grund slet ikke forekomme.

3. Mellemregninger skal altid angives og forklaringer anføres. Også i et Maple-worksheet skal skrives forklarende tekst mellem udregningerne.

4. Undgå *Cut and Paste* i Maple: Gem i stedet resultater, der skal bruges senere, i en variabel.

5. **Vi *insisterer* i kurset på, at man bruger Maple notation i input og arbejder i worksheet mode.**