DesignMat Ugeseddel 7
Systemer af lineære differentialligninger III

Institut for Matematik

Efterår 2010

1 Forberedelse

Repetér LA 7.4.

2 Aktiviteter mandag 13–17

2.1 Forelæsning

LA 7.4 (pp. 213-215) og LA 7.5 Sætning 7.19 (p.218).

- System af lineære differentialligninger af 2. orden *uden* led af første orden
- System af lineære differentialligninger af 2. orden *med* led af første orden: Omformning til system af 1. ordens differentialligninger.

2.2 Øvelser

1. Givet differentialligningerne

$$\begin{aligned} y_1'' + 2y_2' + 2y_1 &= 15\sin(t) \\ y_2'' + 2y_1' + 12y_2 &= 15\cos(t) \end{aligned} \tag{1}$$

   (a) (*E2, kun dette spørgsmål*)[1] Omskriv ved håndkraft (1) til et differentialligningssystem af første orden med $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_1'$ og $x_4 = y_2'$. Skriv det på formen $\dot{x} = Ax + b(t)$.

   (b) Find vha. Maple egenværdier og egenvektorer for A.

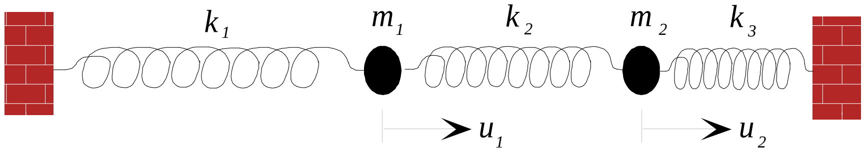
   (c) Find den fuldstændige komplekse løsning til det tilsvarende homogene system ved brug af svaret fra 1b. (Gerne i Maple).

   (d) Vis ved indsættelse (gerne i Maple), at $x_p(t) = [13\sin t \quad -\cos t \quad 13\cos t \quad \sin t]^T$ er en partikulær løsning til det inhomogene system $\dot{x} = Ax + b(t)$ og angiv den fuldstændige komplekse løsning.

   (e) Hvilke reelle funktioner vil indgå i den fuldstændige reelle løsning?

2. I forelæsningen betragtedes et system som vist på figuren. Masserne er m_1 og m_2 og fjederkonstanterne er k_1, k_2 og k_3.

[1] Opgaver markeret med E2 er opgaver af en type, der vil egne sig til 2-timersprøven i december. Ved 2-timersprøven vil evt. bemærkninger om Maple dog være fjernet.



Idet u_1 og u_2 er forskydningerne fra ligevægtsstillingen for de to masser, fås det af Newtons 2. lov, at

$$\begin{aligned} m_1 u_1'' + (k_1 + k_2)\, u_1 - k_2 u_2 &= 0 \\ m_2 u_2'' + (k_2 + k_3)\, u_2 - k_2 u_1 &= 0 \end{aligned}$$

Systemet blev i forelæsningen omskrevet til et differentialligningssystem af formen $\ddot{u} = Au$. Her skal det i stedet omskrives til et system af første orden.

(a) Omskriv systemet til et system af første orden $\dot{x} = Ax$, idet man vælger $x_1 = u_1, x_2 = u_2, x_3 = u_1', x_4 = u_2'$.

(b) Lad nu $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ og $m_1 = m_2 = 1$. Find egenværdier og egenvektorer for systemmatricen A vha. Maple.

(c) Opskriv den fuldstændige komplekse løsning.

(d) Find den fuldstændige reelle løsning.

(e) Find den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3. Betragt igen systemet i øvelse 2 og stadig i det konkrete tilfælde $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ og $m_1 = m_2 = 1$. Find ved brug af Cayley-Hamiltons sætning en differentialligning af 4. orden, som både u_1 og u_2 opfylder. Find den fuldstændige løsning til denne differentialligning.

3 Ugens Mapleprocedurer

- Eigenvectors
- Re og Im
- dsolve

4 Hjemmeopgaver

1. Betragt igen partiklerne i fjedersystemet i øvelse 2, men denne gang med en hastigheds-afhængig lineær dæmpning. Newtons 2. lov giver nu

$$\begin{aligned} m_1 u_1'' + (k_1 + k_2)\, u_1 - k_2 u_2 + c_1 u_1' &= 0 \\ m_2 u_2'' + (k_2 + k_3)\, u_2 - k_2 u_1 + c_2 u_2' &= 0 \end{aligned}$$

hvor $c_1, c_2 > 0$.

(a) Omskriv dette koblede system af to differentialligninger af anden orden til et system af første orden $\dot{x} = Ax$, idet man vælger $x_1 = u_1, x_2 = u_2, x_3 = u_1', x_4 = u_2'$.

(b) Lad nu $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ og $m_1 = m_2 = 1$ og $c_1 = c_2 = c > 0$. Find egenværdier og egenvektorer for systemmatricen A vha. Maple. Disse størrelser vil afhænge af c.

(c) Opskriv den fuldstændige komplekse løsning.

(d) For hvilke værdier af c er

i. alle (ikke-trivielle) løsninger svingninger?
ii. nogle løsninger svingninger, andre ikke?
iii. ingen løsninger svingninger?

2. Betragt systemet i hjemmeopgave 1 og stadig i det halvkonkrete tilfælde $k_1 = k_2 = k_3 = 1, m_1 = m_2 = 1$ og $c_1 = c_2 = c > 0$.

   (a) Find ved brug af Cayley-Hamiltons sætning en differentialligning af 4. orden, som både u_1 og u_2 opfylder.

   (b) Betragt nu begyndelsesbetingelserne $u_1(0) = 1, u_2(0) = 0, u_1'(0) = u_2'(0) = 0$. Vis vha. de oprindelige differentialligninger, at $u_1''(0) = -2$ og $u_1'''(0) = 2c$ og løs nu 4. ordens differentialligningen for u_1 vha. Maple, når $c = \frac{1}{6}$. Tegn løsningens graf på intervallet $[0, 50]$.

5 Afleveringsopgaver

Visse af hjemmeopgaverne og visse af øvelsesopgaverne skal afleveres. Der afleveres opgaver 3 gange pr. semester. Datoerne for afleveringerne fremgår af hjemmesiden. Hvilke opgaver, der skal afleveres, vil blive offentliggjort på hjemmesiden 6 dage før afleveringstidspunktet.

Om afleveringen

1. Sørg for allerede fra starten at skrive forklaringer sammen med beregninger. Dette vil lette afpudsningen, når det via hjemmesiden oplyses, hvilke af opgaverne, der skal afleveres.

2. Brug både Maple og håndregning. Det er vigtigt, at svar altid kontrolleres. Hertil er Maple et fortrinligt hjælpemiddel. Regnefejl bør af den grund slet ikke forekomme.

3. Mellemregninger skal altid angives og forklaringer anføres. Også i et Maple-worksheet skal skrives forklarende tekst mellem udregningerne.

4. Undgå *Cut and Paste* i Maple: Gem i stedet resultater, der skal bruges senere, i en variabel.

5. **Vi *insisterer* i kurset på, at man bruger Maple notation i input og arbejder i worksheet mode.**