

DesignMat Ugeseddel 2

Taylor's formel og grænseværdier

Institut for Matematik

Forår 2010

1 Forberedelse

MA1 eksemplerne 6.1, 6.4, 6.5.

2 Aktiviteter mandag 13–17

2.1 Forelæsning

Emner fra MA1, 6.1, 6.2.

- Taylorpolynomier.
- Definition af differentiability (linearisering).
- Taylor's formel for vilkårligt n .
- Taylor's grænseformel som Maple skriver den: $f(x) = P_n(x) + O((x - x_0)^{n+1})$.

2.2 Øvelser

1. (F2)¹ Find Taylorpolynomiet af orden 2, P_2 , med udviklingspunkt $x_0 = 1$ for funktionen f givet ved $f(x) = 3 + x \ln x$ for $x > 0$. Brug håndkraft, men kontrollér resultatet i Maple. Tegn i samme koordinatsystem f og P_2 på intervallet $[0, 2]$.
2. Brug Maple til at finde Taylorpolynomiet af orden 9, P_9 , med udviklingspunkt $x_0 = 0$ for funktionen \sin . Tegn i samme koordinatsystem \sin og P_9 på intervallet $[-4, 4]$. Tegn forskellen mellem P_9 og $\sin x$ på intervallet $[-4, 4]$. Prøv også intervallet $[-5, 5]$.
3. Find lineariseringer af følgende funktionsudtryk omkring $x_0 = 0$ (brug Maple):

$$e^x, \cos x, \sqrt{1+x}, e^{\sin x}, \cosh x$$

4. Der er givet funktionen f ved forskriften $f(x) = 1/(1+x^2)$.
 - (a) Definér f som en funktion i Maple. Her skal bruges pilenotation og man begynder således: `f := x ->`
 - (b) Bestem Taylorpolynomiet P_2 af orden 2 for f med udviklingspunkt 0 ved direkte at bruge Definition 6.2 (side 6.7). Her skal man bruge differentiationsoperatoren D i Maple.

¹Opgaver markeret med F2 er opgaver af en type, der vil egne sig til 2-timersprøven til sommer. Ved 2-timersprøven vil evt. bemærkninger om Maple dog være fjernet.

- (c) Bestem Taylorpolynomierne af ordenerne 4 og 6 (P_4 og P_6) med udviklingspunkt 0 (gerne ved brug af `mtaylor`). Tegn f, P_2, P_4 og P_6 i samme koordinatsystem på intervallet $[-1, 1]$.
- (d) Find P_{24} og udnyt resultatet til at finde $f^{(24)}(0)$.
5. Lad $f = \ln$, den naturlige logaritmfunktion.
- (a) Find Taylorpolynomiet P_5 af orden 5 med udviklingspunkt 1.
- (b) Tegn i samme koordinatsystem graferne for f og P_5 på intervallet $[0, 2]$.
- (c) Tegn grafen for $R_5 = f - P_5$ på intervallet $[1, 2]$. Aflæs på figuren den største værdi $|R_5|$ antager i intervallet $[1, 2]$. Hermed har vi fundet den største *faktiske* fejl, man begår ved at erstatte $f(x)$ med $P_5(x)$ for $x \in [1, 2]$.
- (d) Restleddet R_5 kan *vurderes* på følgende måde: Find den størst tænkelige værdi $|f^{(6)}(x)|$ kan antage i intervallet $[1, 2]$ og benyt denne (M) til vurdere restleddet ved $|R_5(x)| \leq \frac{1}{6!} M |x-1|^6 \leq \dots$ Er denne *vurdering* i overensstemmelse med den tidligere aflæste *faktisk* største numeriske værdi af restleddet?
- (e) Hvad ville resultaterne af spørgsmål 5c og 5d være, hvis det betragtede interval i stedet var $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$?

2.3 Ugens Mapleprocedurer

På dette sted anbringes Mapleprocedurer og Maplekommandoer, der er specielt relevante for øvelser og hjemmeopgaver i denne uge. Det kan kraftigt anbefales, at man også kigger på det Maple-worksheet, der hører til dagens forelæsning.

- `taylor`
- `mtaylor`
- `D`

3 Hjemmeopgaver

Hjemmeopgaverne er opgaver, der regnes uden for øvelsetiden. Dette betyder, at man ikke skal forvente hjælp i øvelsetiden til disse opgaver. Hjælp til øvelsesopgaverne har første prioritet.

1. (F2) Find grænseværdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

ved brug af Taylors grænseformel på $\ln(1+x)$ med udviklingspunkt 0. Brug håndkraft, men kontrollér resultatet i Maple ved brug af `limit`.

2. (F2) Om en funktion f vides, at $y = f(x)$ opfylder differentialligningen $y' = \arctan(xy)$ med begyndelsesbetingelsen $y(2) = \frac{1}{2}$. Find funktionens Taylorpolynomium P_2 af orden 2 og udviklingspunkt 2. Dette skal gøres i hånden, men kan kontrolleres ved en kommando som vist i Maplebogen p. 53.

4 Afleveringsopgaver

Visse af hjemmeopgaverne og visse af øvelsesopgaverne skal afleveres. Der afleveres opgaver 3 gange pr. semester. Datoerne for afleveringerne fremgår af hjemmesiden. Hvilke opgaver, der skal afleveres, vil blive offentliggjort på hjemmesiden 6 dage før afleveringstidspunktet.

Om afleveringen

1. Sørg for allerede fra starten at skrive forklaringer sammen med beregninger. Dette vil lette afpudsningen, når det via hjemmesiden oplyses, hvilke af opgaverne, der skal afleveres.
2. Brug både Maple og håndregning. Det er vigtigt, at svar altid kontrolleres. Hertil er Maple et fortrinligt hjælpemiddel. Regnefejl bør af den grund slet ikke forekomme.
3. Mellemregninger skal altid angives og forklaringer anføres. Også i et Maple-worksheet skal skrives forklarende tekst mellem udregningerne.
4. Undgå *Cut and Paste* i Maple: Gem i stedet resultater, der skal bruges senere, i en variabel.
5. **Vi *insisterer* i kurset på, at man bruger Maple notation i input og arbejder i worksheet mode.**