

DesignMat Ugeseddel 5

Kvadratiske matricer, invers matrix, determinant

Institut for Matematik

Forår 2010

1 Forberedelse

Læs LA. pp. 62 - 70 og pp. 88 - 100. Kig specielt på eksemplerne LA2.14, LA2.17 og LA3.5.

2 Aktiviteter mandag 13–17

2.1 Forelæsning

Emner fra Lineær Algebra, kapitel 2 og 3.

- Kvadratiske matricer, invers matrix (Sætning 2.13 og 2.16).
- Permutationer. Fortegn for en permutation. Determinanten af en $n \times n$ matrix.
- Nogle sætninger om determinanter (sætning 3.5, 3.6, 3.9, 3.10, og 3.12).

2.2 Øvelser

1. LA 2.18 (gerne ved brug af Maple).

2. Lad $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ og $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, hvor $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$.

- Løs ligningen $Ax = b$ med Maple.
- Find A^{-1} og $x = A^{-1}b$ vha. Maple.
- Kontrollér, at det er den samme løsning x , som optræder i de to udregninger ovenfor.
- Vis, at elementerne i x begge kan skrives som en kvotient af to determinanter. Dette resultat kaldes *Cramers formel*. Formlen kan udvides til $n \times n$ systemer, jvf. sætning 3.16. Sætningen gælder med den vigtige forudsætning, at $\det A \neq 0$.

3. (F2)¹ Givet matricerne

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \text{ og } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Udregn ved håndregning AC , BD og DC . Angiv, om muligt, A^{-1} , B^{-1} og $(AB)^{-1}$.

4. (F2) Undersøg for hver af matricerne $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

om den er invertibel, og find i givet fald dens inverse ved Gausselimination på totalmatricen $[A|I]$ som i eksempel 2.14. Håndregning efterfulgt af Maplekontrol.

¹Opgaver markeret med F2 er opgaver af en type, der vil egne sig til 2-timersprøven til sommer. Ved 2-timersprøven vil evt. bemærkninger om Maple dog være fjernet.

5. Givet matricerne

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Udregn $\det(A)$ og $\det(B)$ med Maple.
- Udregn $\det(A^7)$ og $\det(A^T B)$ i hovedet men under brug af resultatet ovenfor.
- Forklar, hvorfor A er invertibel, og angiv $\det(A^{-1})$ og $\det(A^{-7})$.
- Find uden Maple (men med kendskab til $\det A$) de 3 determinanter

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3+a & 5+2a & 4+3a \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

6. Hvad sker der med værdien af en determinant, når man skifter fortegn på alle elementer i en række? Hvad hvis man skifter fortegn på samtlige elementer i hele matricen?

3 Ugens Mapleprocedurer

- Determinant

4 Hjemmeopgaver

Hjemmeopgaverne er opgaver, der regnes uden for øvelsestiden. Dette betyder, at man ikke skal forvente hjælp i øvelsestiden til disse opgaver. Hjælp til øvelsesopgaverne har første prioritet.

- (F2) LA: Opgave 2.32. Håndregning efterfulgt af Maplekontrol.
- LA: Opgave 3.3. Håndregning efterfulgt af Maplekontrol.
- (F2) LA: Opgave 3.9. Håndregning efterfulgt af Maplekontrol.

5 Afleveringsopgaver

Visse af hjemmeopgaverne og visse af øvelsesopgaverne skal afleveres. Der afleveres opgaver 3 gange pr. semester. Datoerne for afleveringerne fremgår af hjemmesiden. Hvilke opgaver, der skal afleveres, vil blive offentliggjort på hjemmesiden 6 dage før afleveringstidspunktet.

Om afleveringen

- Sørg for allerede fra starten at skrive forklaringer sammen med beregninger. Dette vil lette afpudsningen, når det via hjemmesiden oplyses, hvilke af opgaverne, der skal afleveres.
- Brug både Maple og håndregning. Det er vigtigt, at svar altid kontrolleres. Hertil er Maple et fortrinligt hjælpemiddel. Regnefejl bør af den grund slet ikke forekomme.
- Mellemregninger skal altid angives og forklaringer anføres. Også i et Maple-worksheet skal skrives forklarende tekst mellem udregningerne.
- Undgå *Cut and Paste* i Maple: Gem i stedet resultater, der skal bruges senere, i en variabel.
- Vi insisterer i kurset på, at man bruger Maple notation i input og arbejder i worksheet mode.**