

DesignMat Ugeseddel 6

Determinant og Egenværdiproblemet for matricer

Institut for Matematik

Forår 2010

1 Forberedelse

Eksemplerne LA 3.9 - 3.13, 7.4 og 7.5.

2 Aktiviteter mandag 13–17

2.1 Forelæsning

Emner fra LA: Afsnit 3.3 og 7.2.

- Komplement, Opløsning af determinant.
- Definition af egenværdi og egenvektor for en matrix A .
- Karakterpolynomiet $\det(A - \lambda I)$.
- Begreberne algebraisk og geometrisk multiplicitet.
- Spor, determinant og egenværdier.

2.2 Øvelser

1. LA: Opgave 3.4. Håndregning med Maplekontrol.

2. (F2)¹ Beregn egenværdier og egenvektorer for følgende matricer: $A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ og $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.
Håndregning med Maplekontrol.

3. (F2) Givet matricen $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Find egenværdierne for A og angiv deres algebraiske og geometriske multipliciteter. Håndregning med Maplekontrol.

4. Givet matricen $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Find egenværdierne for B og angiv deres algebraiske og geometriske multipliciteter. Håndregning med Maplekontrol.

5. Givet matricen $A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Vi ser, at $A = A^T$. Matricen A er *symmetrisk*.

¹Opgaver markeret med F2 er opgaver af en type, der vil egne sig til 2-timersprøven til sommer. Ved 2-timersprøven vil evt. bemærkninger om Maple dog være fjernet.

- (a) Vis, at egenverdierne for A begge er reelle. Dette må forekomme som en underlig talemåde, da vi endnu ikke har indført de komplekse tal, hvor $\sqrt{-1}$ betragtes som hørende til det pæne selskab. Derfor også en anden formulering: Vis, at der altid er løsninger til karakterligningen for A .
- (b) Prøv Maple-kommandoen
`A:=RandomMatrix(3,outputoptions=[shape=symmetric,datatype=float[8]]);`
 Denne kommando leverer en tilfældigt valgt symmetrisk 3×3 -matrix med decimalbrøks-elementer (float[8]).
 Find egenverdierne for A . Prøv samme kommando flere gange. Erstat 3-tallet med et større tal og gentag eksperimentet. Prøv uden `datatype=float[8]`.
6. Lad A og V være $n \times n$ -matricer. Antag, at V er invertibel. Lad $B = V^{-1}AV$.
- (a) Vis, at $\det B = \det A$.
- (b) Vis, at A og B har samme egenverdier.
7. Lad $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -35 & 384 & -34 & 128 \\ 36 & -396 & 35 & -132 \\ 114 & -1254 & 111 & -418 \end{bmatrix}$. Find vha. Maple en matrix V , hvis søjler er lineært uafhængige egenvektorer for A . Udregn $V^{-1}AV$ og sammenlign resultatet med egenverdierne.
8. Vis, at A^T er diagonaliserbar, hvis og kun hvis A er diagonaliserbar.

3 Ugens Mapleprocedurer

- Determinant
- CharacteristicPolynomial
- Eigenvalues
- Eigenvector

4 Hjemmeopgaver

Hjemmeopgaverne er opgaver, der regnes uden for øvelsetiden. Dette betyder, at man ikke skal forvente hjælp i øvelsetiden til disse opgaver. Hjælp til øvelsesopgaverne har første prioritet.

1. (F2) LA: Opgave 7.1. Brug håndregning i den første og Maple i de andre 3.
2. (F2) LA: Opgave 7.8. Håndregning med Maplekontrol.
3. Opgave om stokastiske matricer. En vektor kaldes *stokastisk*, hvis alle dens elementer er ikke-negative og hvis elementernes sum er 1. En kvadratisk matrix kaldes *stokastisk*, hvis alle dens søjler er stokastiske.

- (a) Lad A være en stokastisk matrix. Vis, at $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ er egenvektor for A^T . Hvad er den tilhørende egenverdi?

- (b) Vis, at hvis v er en stokastisk vektor og A en stokastisk matrix, så er Av en stokastisk vektor.

- (c) Lad $A = \begin{bmatrix} 0.72 & 0.51 \\ 0.28 & 0.49 \end{bmatrix}$. Find egenverdier og egenvektorer for A . Lad $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Find $Av, A^2v, A^3v, \dots, A^9v$ og indtegn dem i et koordinatsystem sammen med v . Forklar hvorfor de 10 punkter ligger på en ret linie.

5 Afleveringsopgaver

Visse af hjemmeopgaverne og visse af øvelsesopgaverne skal afleveres. Der afleveres opgaver 3 gange pr. semester. Datoerne for afleveringerne fremgår af hjemmesiden. Hvilke opgaver, der skal afleveres, vil blive offentliggjort på hjemmesiden 6 dage før afleveringstidspunktet.

Om afleveringen

1. Sørg for allerede fra starten at skrive forklaringer sammen med beregninger. Dette vil lette afpudsningen, når det via hjemmesiden oplyses, hvilke af opgaverne, der skal afleveres.
2. Brug både Maple og håndregning. Det er vigtigt, at svar altid kontrolleres. Hertil er Maple et fortrinligt hjælpemiddel. Regnefejl bør af den grund slet ikke forekomme.
3. Mellemregninger skal altid angives og forklaringer anføres. Også i et Maple-worksheet skal skrives forklarende tekst mellem udregningerne.
4. Undgå *Cut and Paste* i Maple: Gem i stedet resultater, der skal bruges senere, i en variabel.
5. **Vi insisterer i kurset på, at man bruger Maple notation i input og arbejder i worksheet mode.**