Danmarks Tekniske Universitet

Skriftlig prøve i Matematik
DesignMat 01007

Torsdag den 10. december 2009, kl. 15.00 - 17.00

Antal opgaver: 4
Tilladte hjælpemidler: Alle.
Vægtning: Opgaverne vægtes som anført ved hver enkelt opgave.
Supplerende oplysninger: Mellemregninger skal anføres i rimeligt omfang. Computer eller lommeregner må kun benyttes til kontrol, dog må de gerne benyttes til Gauss-elimination og til udregning af determinanter, differentialkvotienter, ubestemte integraler og rødder i polynomier.

Opgave 1 (25 point).

Der er givet differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -20x_1 + 14x_2 \\ \dot{x}_2 &= -27x_1 + 19x_2 \end{aligned}$$

1. Find den fuldstændige løsning.
2. Find den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Opgave 2 (25 point).

I $C^1(\mathbb{R})$ er givet vektorerne

$$u_1(x) = 1,\ u_2(x) = \cosh(x),\ u_3(x) = \sinh(x),\ u_4(x) = e^{-x},\ u_5(x) = e^x$$

Lad $U = \text{span}(u_1, u_2, u_3)$ og lad $f : U \to U$ være givet ved $f(u) = u' + 4u$ for $u \in U$, hvor u' er den afledede af u.

1. Vis, at f er lineær.
2. Vis, at $a = (u_1, u_2, u_3)$ er en basis for U. Vink: Man kan evt. i dette og det følgende spørgsmål udnytte, at $\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$ og $\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$.
3. Find afbildningsmatricen ${}_aF_a$ for f mht. basis a.
4. Vis, at u_1, u_4 og u_5 er egenvektorer for f og angiv de tilhørende egenværdier.
5. Forklar, hvorfor $b = (u_1, u_4, u_5)$ er en anden basis for U og angiv afbildningsmatricen ${}_bF_b$ for f mht. basis b.

Opgave 3 (25 point).

Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er differentiabel i punktet $(4, 2)$ med partielle afledede givet ved $f'_x(4, -2) = 7$ og $f'_y(4, -2) = 9$. Desuden vides, at $f(4, -2) = 25$.

Funktionen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er givet ved forskriften

$$g(u, v) = f\left(u^2 + v, u - v\right)$$

for alle $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

1. Angiv Taylorpolynomiet $P_1(x, y)$ af orden 1 for $f(x, y)$ med udviklingspunkt $(x, y) = (4, -2)$.
2. Find Taylorpolynomiet $Q_1(u, v)$ af orden 1 for $g(u, v)$ med udviklingspunkt $(u, v) = (1, 3)$.

Opgave 4 (25 point).

Lad f være givet ved $f(x, y) = \left(x^2 + 2y^2 + 2xy\right) e^{-x}$ for alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Vis, at $(0, 0)$ og $(2, -1)$ er stationære punkter for f.
2. Undersøg for hvert af de to stationære punkter, om det er et lokalt maksimums- eller minimumspunkt.