DesignMat
Løsninger til 2-timersprøven 10. december 2009

Preben Alsholm

10. december 2009

Opgave 1

Der er givet differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -20x_1 + 14x_2 \\ \dot{x}_2 &= -27x_1 + 19x_2 \end{aligned}$$

1. Vi finder den fuldstændige løsning. Systemmatricen er

$$A = \begin{bmatrix} -20 & 14 \\ -27 & 19 \end{bmatrix}$$

Dennes egenværdier er rødderne i karakterpolynomiet

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -20-\lambda & 14 \\ -27 & 19-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2$$

Egenværdierne er derfor -2 og 1.
Egenvektorer v hørende til egenværdien -2 opfylder ligningen $(A - (-2)\,I)\,v = 0$. Totalmatricen for dette system er

$$\begin{bmatrix} -18 & 14 & 0 \\ -27 & 21 & 0 \end{bmatrix}$$

der ved gausselimination giver

$$\begin{bmatrix} -9 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

således, at én egenvektor hørende til egenværdien -2 er $v_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$.
Egenvektorer v hørende til egenværdien 1 opfylder ligningen $(A - I)\,v = 0$. Totalmatricen for dette system er

$$\begin{bmatrix} -21 & 14 & 0 \\ -27 & 18 & 0 \end{bmatrix}$$

der ved gausselimination giver

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

således, at én egenvektor hørende til egeværdien 1 er $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.
Den fuldstændige løsning er derfor

$$x(t) = c_1 e^{-2t} v_1 + c_2 e^{t} v_2 = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} + c_2 e^{t} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

hvor c_1, c_2 er arbitrære reelle konstanter.

2. Den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen $x\left(0\right)=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ har konstanter, der opfylder

$$c_1\begin{bmatrix}7\\9\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$$

   altså

$$\begin{bmatrix}7&2\\9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$$

   Totalmatricen reduceres ved gausselimination til reduceret echelonform:

$$\begin{bmatrix}7&2&1\\9&3&3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&4\end{bmatrix}$$

   Heraf aflæses, at $c_1=-1$ og $c_2=4$, således at den søgte løsning er

$$x\left(t\right)=-e^{-2t}\begin{bmatrix}7\\9\end{bmatrix}+4e^{t}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8e^{t}-7e^{-2t}\\12e^{t}-9e^{-2t}\end{bmatrix}$$

Opgave 2

I $C^1(\mathbb{R})$ er givet vektorerne

$$u_1(x)=1,\ u_2(x)=\cosh(x),\ u_3(x)=\sinh\left(x\right),\ u_4(x)=e^{-x},\ u_5(x)=e^{x}$$

Lad $U=$span(u_1,u_2,u_3).

1. Lad $f:U\rightarrow U$ være givet ved $f\left(u\right)=u'+4u$ for $u\in U$, hvor u' er den afledede af u. Vi viser, at f er lineær. Vi har for $u,v\in U$ og $k\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}f\left(u+v\right)&=\left(u+v\right)'+4\left(u+v\right)=u'+v'+4u+4v=f\left(u\right)+f\left(v\right)\\f\left(ku\right)&=\left(ku\right)'+4\left(ku\right)=ku'+4ku=kf\left(u\right)\end{aligned}$$

   hvilket viser, at f er lineær.

2. Vi viser, at $a=(u_1,u_2,u_3)$ er en basis for U. Da U jo er defineret som span(u_1,u_2,u_3), behøver vi blot vise, at u_1,u_2,u_3 er lineært uafhængige. Antag derfor, at

$$c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3=0$$

   altså konkret

$$c_1+c_2\cosh x+c_3\sinh x=0 \tag{1}$$

   for alle $x\in\mathbb{R}$. Vi skal vise, at $c_1=c_2=c_3=0$. Ved differentiation henholdsvis én og to gange fås

$$c_2\sinh x+c_3\cosh x=0 \tag{2}$$

   og

$$c_2\cosh x+c_3\sinh x=0 \tag{3}$$

   Ved indsættelse af $x=0$ i ligningerne (1), (2) og (3) fås ligningssystemet

$$c_1+c_2=0,c_3=0,c_2=0$$

   Hvor af umiddelbart følger, at $c_1=c_2=c_3=0$, hvilket skulle vises.

3. Afbildningsmatricen ${}_aF_a$ for f mht. basis a findes direkte ud fra definitionen:

$$ {}_aF_a = \left[\begin{array}{ccc} K_a(f(u_1)) & K_a(f(u_2)) & K_a(f(u_3)) \end{array} \right] $$

Vi har

$$ \begin{array}{rcl} f(u_1) & = & f(1) = (1)' + 4 \cdot 1 = 4 \cdot 1 = 4u_1 \\ f(u_2) & = & (\cosh x)' + 4\cosh x = \sinh x + 4\cosh x = u_3 + 4u_2 \\ f(u_3) & = & (\sinh x)' + 4\sinh x = \cosh x + 4\sinh x = u_2 + 4u_3 \end{array} $$

så

$$ {}_aF_a = \left[\begin{array}{ccc} K_a(f(u_1)) & K_a(f(u_2)) & K_a(f(u_3)) \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} $$

4. Vi viser, at u_1, u_4 og u_5 er egenvektorer for f. At $f(u_1) = 4u_1$ blev vist ovenfor. Desuden har vi

$$ \begin{array}{rcl} f(u_4) & = & f\left(e^{-x}\right) = \left(e^{-x}\right)' + 4e^{-x} = -e^{-x} + 4e^{-x} = 3e^{-x} = 3u_4 \\ f(u_5) & = & f(e^x) = (e^x)' + 4e^x = e^x + 4e^{-x} = 5e^{-x} = 5u_5 \end{array} $$

hvilket viser det ønskede. De tilhørende egenværdier er $4, 3$ og 5, henholdsvis.

5. Da de 3 egenværdier er forskellige, er u_1, u_4, u_5 lineært uafhængige, og da $\dim U = 3$, er $b = (u_1, u_4, u_5)$ en basis for U. Afbildningsmatricen ${}_bF_b$ for f mht. basis b er diagonal, da b består af egenvektorer. Diagonalelementerne er egenværdierne:

$$ {}_bF_b = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} $$

Opgave 3

Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er differentiabel i punktet $(4, -2)$ med partielle afledede givet ved $f'_x(4, -2) = 7$ og $f'_y(4, -2) = 9$. Desuden vides, at $f(4, -2) = 25$.

Funktionen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er givet ved forskriften

$$ g(u, v) = f\left(u^2 + v, u - v\right) $$

for alle $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

1. Taylorpolynomiet $P_1(x, y)$ af orden 1 for $f(x, y)$ med udviklingspunkt $(4, -2)$ er givet ved

$$ \begin{array}{rcl} P_1(x, y) & = & f(4, -2) + f'_x(4, -2)(x - 4) + f'_y(4, -2)(y + 2) \\ & = & 25 + 7(x - 4) + 9(y + 2) \end{array} $$

2. Vi finder Taylorpolynomiet $Q_1(u, v)$ af orden 1 for $g(u, v)$ med udviklingspunkt $(1, 3)$. Vi har

$$ Q_1(u, v) = g(1, 3) + g'_u(1, 3)(u - 1) + g'_v(1, 3)(v - 3) $$

Vi bemærker først, at $g(1, 3) = f\left(1^2 + 3, 1 - 3\right) = f(4, -2) = 25$.

Vi beregner herefter $g'_u(1, 3)$:

$$ \begin{array}{rcl} g'_u(u, v) & = & \dfrac{\partial}{\partial u} f\left(u^2 + v, u - v\right) \\ & = & f'_x\left(u^2 + v, u - v\right) \cdot \dfrac{\partial}{\partial u}\left(u^2 + v\right) + f'_y\left(u^2 + v, u - v\right) \cdot \dfrac{\partial}{\partial u}(u - v) \\ & = & f'_x\left(u^2 + v, u - v\right) 2u + f'_y(u + v, u - v) \end{array} $$

således at $g'_u(1,3) = f'_x(4,-2) \cdot 2 + f'_y(4,-2) = 7 \cdot 2 + 9 = 23$.
På samme måde beregner vi $g'_v(1,3)$:

$$\begin{aligned}
g'_v(u,v) &= \frac{\partial}{\partial v} f\left(u^2+v, u-v\right) \\
&= f'_x\left(u^2+v,u-v\right) \cdot \frac{\partial}{\partial v}\left(u^2+v\right) + f'_y\left(u^2+v,u-v\right) \cdot \frac{\partial}{\partial v}(u-v) \\
&= f'_x\left(u^2+v,u-v\right) - f'_y(u+v,u-v)
\end{aligned}$$

således at $g'_v(1,3) = f'_x(4,-2) - f'_y(4,-2) = 7 - 9 = -2$.
Altså har vi

$$\begin{aligned}
Q_1(u,v) &= g(1,3) + g'_u(1,3)(u-1) + g'_v(1,3)(v-3) \\
&= 25 + 23(u-1) - 2(v-3)
\end{aligned}$$

Opgave 4

Lad f være givet ved $f(x,y) = \left(x^2+2y^2+2xy\right)e^{-x}$ for alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Vi viser, at $(0,0)$ og $(2,-1)$ er stationære punkter for f. Vi har

$$\begin{aligned}
f'_x(x,y) &= \left(-x^2-2xy-2y^2+2x+2y\right)e^{-x} \\
f'_y(x,y) &= (4y+2x)e^{-x}
\end{aligned}$$

Heraf følger, at $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ og at $f'_x(2,-1) = f'_y(2,-1) = 0$. Derfor er $(0,0)$ og $(2,-1)$ er stationære punkter for f.

2. Vi undersøger for hvert af de to stationære punkter, om det er et lokalt maksimums- eller minimumspunkt.
Hessematricen i et generelt punkt er

$$\begin{aligned}
H(x,y) &= \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{xy}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left(x^2+2xy+2y^2-4x-4y+2\right)e^{-x} & (2-4y-2x)e^{-x} \\ (2-4y-2x)e^{-x} & 4e^{-x} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Derfor fås

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

hvis determinant er 4, altså positiv. Sporet er 6, også positivt. Derfor er $(0,0)$ et egentligt lokalt minimumspunkt.
For det andet punkt fås

$$H(2,-1) = \begin{bmatrix} 0 & 2e^{-2} \\ 2e^{-2} & 4e^{-2} \end{bmatrix}$$

hvis determinant er $-4e^{-4}$, altså negativ. Derfor er $(2,-1)$ et saddelpunkt og dermed ikke noget ekstremumspunkt.