

Skriftlig prøve i Matematik DesignMat 01007

torsdag den 20. maj 2010

Antal opgaver: 4

Tilladte hjælpemidler: Alle.

Vægtning: Opgaverne vægtes som anført ved hver enkelt opgave.

Supplerende oplysninger: Mellemregninger skal anføres i rimeligt omfang. Computer eller lommeregner må kun benyttes til kontrol, dog må de gerne benyttes til udregning af differentialkvotienter og ubestemte integraler.

Opgave 1 (25 point).

Lad vektorerne $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ være givet ved

$$v_1 = (1, 0, 3, 4), v_2 = (0, 2, 0, -2), v_3 = (1, 7, -1, -3), v_4 = (6, 15, 6, 9)$$

1. Vis, at v_1, v_2, v_3 er lineært uafhængige.
2. Lad $U = \text{span}(v_1, v_2, v_3)$. Forklar kort, hvorfor v_1, v_2, v_3 er en basis for U .
3. Vis, at $v_4 \in U$ og find koordinaterne for v_4 mht. basis v_1, v_2, v_3 .

Opgave 2 (25 point).

Der er givet differentialligningen

$$2x'' + 2x' + 5x = 25e^{-t} \cos(2t) \quad (*)$$

1. Find den fuldstændige (reelle) løsning til den tilsvarende homogene ligning.
2. Find en partikulær løsning til (*) ved brug af den komplekse gættemetode.
Vink: $25e^{-t} \cos(2t) = \text{Re}(25e^{(-1+2i)t})$.
3. Angiv den fuldstændige (reelle) løsning til differentialligningen (*).

Opgave 3 (25 point).

Der er givet matricen

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 8 & 4 \\ -16 & 2 & -16 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -12 & 0 & -12 & -4 \end{bmatrix}$$

1. Find egenverdierne for A . Vink: Udvikling langs en passende valgt række eller søjle.
2. En af egenverdierne er 2. Find en basis for egenvektorrummet hørende til egenværdien 2.

Opgave 4 (25 point).

Der er givet differentialligningen

$$x'(t) = x(t)^2 - \arctan t \quad (**)$$

1. Forklar kort, hvorfor differentialligningen (**) ikke er lineær.
2. Bestem taylorpolynomiet P_3 af orden 3 og udviklingspunkt 0 for den løsning til differentialligningen (**), som opfylder begyndelsesbetingelsen $x(0) = -1$. Vink: Forsøg *ikke* på at løse differentialligningen!