DesignMat Uge 1
Introduktion til Maple, Nye elementære funktioner

Preben Alsholm

Forår 2010

1 Om kursets form og indhold

Om kursets form og indhold

- Kursets hjemmeside indeholder al information om kurset.
- Adressen er `http://www2.mat.dtu.dk/education/01007/`
- Præsentationer som denne vil blive lagt på hjemmesiden.
- Maple-worksheets vil blive anbragt på hjemmesiden.
- Meddelelser udsendes over CampusNet.

2 Introduktion til Maple

Introduktion til Maple

- Introduktionen vil selvfølgelig foregå i Maple-programmet.
- Programmet hentes på `http://www.gbar.dtu.dk/software/`
- Efter installation indstil programmet til *Maple Notation* og *Worksheet Mode*.
- Maple vil blive brugt i alle 26 uger både under forelæsninger og øvelser.
- Maple bruges bl.a.:
- til kontrol af håndregninger
- til grafiske illustrationer
- til længere udregninger, der ellers ville være umulige eller for tidskrævende
- til eksperimenter

3 Hyperbolske funktioner

3.1 sinh og cosh

sinh og cosh

- Sinus hyperbolsk defineres således for alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

- Cosinus hyperbolsk defineres således for alle $x \in \mathbb{R}$

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

- Begge er definerede og differentiable overalt med

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x, \quad \frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$$

- Hyperbolsk idiotformel: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Bevis:

$$\begin{aligned}(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 &= \left(\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

3.2 tanh

tanh

- Tangens hyperbolsk defineres således for alle $x \in \mathbb{R}$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

- Vi har åbenbart

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

- Derfor gælder $\tanh x \to 1$ for $x \to \infty$ og $\tanh x \to -1$ for $x \to -\infty$.
- For grafer se Maple.

4 Omvendt funktion

4.1 Omvendt funktion generelt

Omvendt funktion generelt

- Funktionen f kaldes *enentydig* (1-1), hvis for alle x_1, x_2:
$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$
- Lad f være enentydig. Den omvendte funktion f^{-1} til f er givet ved
$$f^{-1}(a) = b \Longleftrightarrow f(b) = a$$
dvs. f^{-1} omgør, hvad f gør.
- Lad f være enentydig. Vi har for alle x: $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$ og $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x$.
- Hvis f er differentiabel i x_0 med $f'(x_0) \neq 0$, så er f^{-1} differentiabel i $y_0 = f(x_0)$ med
$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$
- Maple: arcsin, arccos og arctan, men se også nedenfor.

4.2 arcsin I

arcsin I

- Betragt restriktionen af sinusfunktionen til $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Lad os kalde den Sin. Vi har altså
$$\mathrm{Sin}(x) = \begin{cases} \sin x & \text{for} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \text{ikke defineret} & \text{for} \quad x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$
- Sin er voksende, og derfor enentydig. Den omvendte funktion kaldes arcussinus og betegnes med arcsin.
- arcsin omgør, hvad Sin gør:
$$\begin{aligned} \arcsin(a) &= b \Longleftrightarrow \mathrm{Sin}(b) = a \\ &\Longleftrightarrow \sin(b) = a \wedge b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$
- Definitionsmængden for arcsin er værdimængden for Sin, altså $[-1, 1]$.
- $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ da $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ og $\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- $\arcsin 0 = 0$ da $\sin(0) = 0$ og $0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ da $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ og $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- $\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$

4.3 arcsin II

arcsin II

- $\sin(\arcsin x) = x$ for alle $x \in [-1,1]$.
- $\arcsin(\sin x) = x$ for alle $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- arcsin er differentiabel i ethvert $x \in]-1,1[$ med

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Bevis. Lad $x_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ og lad $f = \sin$ i den generelle sætning om differentiabilitet. $f'(x_0) = \cos x_0 \neq 0$. Sæt $y_0 = f(x_0) = \sin x_0$, så gælder

$$\begin{aligned} \left(f^{-1}\right)'(y_0) &= \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\cos x_0} = \\ \frac{1}{(\pm)?\sqrt{1-(\sin x_0)^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1-(\sin x_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}} \end{aligned}$$

4.4 arccos I

arccos I

- Betragt restriktionen af cosinusfunktionen til $[0,\pi]$. Lad os kalde den Cos. Vi har altså

$$\mathrm{Cos}(x) = \begin{cases} \cos x & \text{for} \quad x \in [0,\pi] \\ \text{ikke defineret} & \text{for} \quad x \notin [0,\pi] \end{cases}$$

- Cos er aftagende, og derfor enentydig. Den omvendte funktion kaldes arcuscosinus og betegnes med arccos.
- arccos omgør, hvad Cos gør:

$$\begin{aligned} \arccos(a) &= b \Longleftrightarrow \mathrm{Cos}(b) = a \\ &\Longleftrightarrow \cos(b) = a \wedge b \in [0,\pi] \end{aligned}$$

- Definitionsmængden for arccos er værdimængden for Cos, altså $[-1,1]$.
- $\arccos 1 = 0$ da $\cos 0 = 1$ og $0 \in [0,\pi]$.
- $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ da $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ og $\frac{\pi}{2} \in [0,\pi]$.
- $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ da $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ og $\frac{\pi}{3} \in [0,\pi]$.
- $\arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$

4.5 arccos II

arccos II

- $\cos(\arccos x) = x$ for alle $x \in [-1,1]$.
- $\arccos(\cos x) = x$ for alle $x \in [0,\pi]$.
- arccos er differentiabel i ethvert $x \in \,]-1,1[$ med

$$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Bevis. Lad $x_0 \in \,]0,\pi[$ og lad $f = \cos$ i den generelle sætning om differentiabilitet. $f'(x_0) = -\sin x_0 \neq 0$. Sæt $y_0 = f(x_0) = \cos x_0$, så gælder

$$\begin{aligned} \left(f^{-1}\right)'(y_0) &= \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{-\sin x_0} = \\ \frac{1}{(\pm)?\sqrt{1-(\cos x_0)^2}} &= -\frac{1}{\sqrt{1-(\sin x_0)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}} \end{aligned}$$

4.6 arctan I

arctan I

- Betragt restriktionen af tangensfunktionen til $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Lad os kalde den Tan. Vi har altså

$$\mathrm{Tan}(x) = \begin{cases} \tan x & \text{for} \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ \text{ikke defineret} & \text{for} \quad x \notin \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

- Tan er voksende, og derfor enentydig. Den omvendte funktion kaldes arcustangens og betegnes med arctan.
- arctan omgør, hvad Tan gør:

$$\begin{aligned} \arctan(a) &= b \Longleftrightarrow \mathrm{Tan}(b) = a \\ &\Longleftrightarrow \tan(b) = a \wedge b \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\end{aligned}$$

- Definitionsmængden for arctan er værdimængden for Tan, altså R.
- $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ da $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ og $\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
- $\arctan 0 = 0$ da $\tan 0 = 0$ og $0 \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
- $\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ da $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ og $\frac{\pi}{3} \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
- $\arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

4.7 arctan II

arctan II

- $\tan(\arctan x) = x$ for alle $x \in R$.
- $\arctan(\tan x) = x$ for alle $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- arctan er differentiabel i ethvert $x \in R$ med

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1 + x^2}$$

- Bevis. Lad $x_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ og lad $f = \tan$ i den generelle sætning om differentiabilitet. $f'(x_0) = 1 + \tan^2 x_0 \neq 0$. Sæt $y_0 = f(x_0) = \tan x_0$, så gælder

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{1 + \tan^2 x_0} = \frac{1}{1 + y_0^2}$$

- Maple.