

DesignMat Uge 2

Taylorpolynomier og Taylors formel

Preben Alsholm

Forår 2010

1 Taylorpolynomier

1.1 Definition af Taylorpolynomium

Definition af Taylorpolynomium

- Givet en funktion $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ og et udviklingspunkt $x_0 \in I$. Find et polynomium P_n af grad højst n , så f og P_n har samme nulte, første, anden, tredje, \dots , n 'te afledede i punktet x_0 .
- P_n skal så opfylde ligningerne

$$\begin{aligned}P_n(x_0) &= f(x_0) \\P_n'(x_0) &= f'(x_0) \\P_n''(x_0) &= f''(x_0) \\&\vdots \\P_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0)\end{aligned}$$

- Skriver vi P_n på formen

$$\begin{aligned}P_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 \\&\quad + a_4(x - x_0)^4 + \dots + a_n(x - x_0)^n\end{aligned}$$

søger vi nu $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$.

1.2 Udlledning af formelen for Taylorpolynomiet

Udlledning af formelen for Taylorpolynomiet

- Vi ser med det samme, at $a_0 = f(x_0)$. Da

$$\begin{aligned}P_n'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 \\&\quad + 4a_4(x - x_0)^3 + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1}\end{aligned}$$

- fås, at $a_1 = f'(x_0)$. Da

$$P_n''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3(x - x_0) + 4 \cdot 3 \cdot a_4(x - x_0)^2 + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}$$

- fås $a_2 = \frac{1}{2}f''(x_0)$. Da

$$P_n'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4(x - x_0) + \dots + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3}$$

fås, at $a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3}f'''(x_0)$.

1.3 Formlen for Taylorpolynomiet

Formlen for Taylorpolynomiet

- Generelt fås altså

$$a_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)$$

således at

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

- Dette kan også skrives

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

idet vi definerer $0! = 1$ og $f^{(0)} = f$.

1.4 Eksempel: Eksponentialfunktionen

Eksempel: Exponentialfunktionen

- $f(x) = e^x$ med udviklingspunkt 0 , orden n . Vi har jo $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$.
- Så $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ for alle $k \geq 0$.
- Hermed fås

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

- Altså

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$

- Dette kan også skrives

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}x^k$$

1.5 Funktion givet ved simpel forskrift

Funktion givet ved simpel forskrift

- $f(x) = x \arctan x$ med udviklingspunkt 1, orden 2.
- Vi har

$$\begin{aligned}f'(x) &= \arctan x + \frac{x}{1+x^2} \\f''(x) &= \frac{2}{1+x^2} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}\end{aligned}$$

- Så $f(1) = \frac{\pi}{4}$, $f'(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$, $f''(1) = \frac{1}{2}$.
- Hermed fås

$$\begin{aligned}P_2(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 \\&= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)(x-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(x-1)^2 \\&= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2\end{aligned}$$

- Maple

1.6 Funktion givet ved differentialligning

Funktion givet ved differentialligning

- Find det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt $\frac{\pi}{2}$ for løsningen til differentialligningen

$$x'(t) = \sin(t + x(t)^2) \text{ med } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

- Vi skal finde $P_2(t) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) + x'\left(\frac{\pi}{2}\right)(t - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}x''\left(\frac{\pi}{2}\right)(t - \frac{\pi}{2})^2$
- Ved indsættelse af $t = \frac{\pi}{2}$ i differentialligningen fås $x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
- Ved differentiation af differentialligningen fås $x''(t) = \cos(t + x(t)^2) \cdot (1 + 2x(t)x'(t))$.
- Ved indsættelse af $t = \frac{\pi}{2}$ heri fås $x''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) \cdot (1 + 2x\left(\frac{\pi}{2}\right)x'\left(\frac{\pi}{2}\right)) = 0$.
- Altså fås $P_2(t) = 0 + (t - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot (t - \frac{\pi}{2})^2 = t - \frac{\pi}{2}$
- som jo er det samme som det første Taylorpolynomium $P_1(t)$. Se Maple for $P_3(t)$.

2 Taylors formel

2.1 Lineariseringen

Lineariseringen

- Definitionen på differentiability kan også formuleres således:
- f er *differentiable* i x_0 med differentialkvotient a , hvis der findes en funktion ε defineret i et interval omkring 0, så

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + \varepsilon(h)h$$

og hvor $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ for $h \rightarrow 0$.

- At f er differentiable i x_0 betyder altså, at $f(x)$ approksimeres godt ved $f(x_0) + a(x - x_0)$, når $|x - x_0|$ er lille.
- Funktionen $P_1(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$ kaldes for *lineariseringen* af f i x_0 .
- Lineariseringen P_1 er det første Taylorpolynomium for f med udviklingspunkt x_0 .
- Grafen for P_1 er tangenten til grafen for f i $(x_0, f(x_0))$.
- Hvor meget smider vi væk, når vi erstatter $f(x)$ med $P_1(x)$?

2.2 Taylors formel med Lagrange's restled

Taylors formel med Lagrange's restled

- Hvad er den fejl man begår ved at erstatte en funktion f med dens Taylorpolynomium P_n ?
- Taylors formel: Lad f være $n + 1$ gange differentiable i intervallet I og lad $x_0 \in I$. For givet $x \in I$ findes et tal ξ mellem x_0 og x , så

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \\ &\quad \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

- Altså $f(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1} = P_n(x) + R_n(x)$.
- Vi beviser ikke sætningen.

2.3 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

- Eksempel. $f(x) = e^x$, udviklingspunkt 0. Vi har $P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$.
- $f^{(n+1)}(x) = e^x$. Så

$$|e^x - P_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi} x^{n+1} \right| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

- Bestem n , så $|e^x - P_n(x)| \leq 10^{-5}$ for alle $x \in [-0.1, 0.1]$.
- I Taylors formel gælder så $|\xi| \leq 0.1$ og dermed

$$\begin{aligned} |e^x - P_n(x)| &= \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{e^{0.1}}{(n+1)!} (0.1)^{n+1} \\ &\leq \frac{2}{(n+1)!} (0.1)^{n+1} \end{aligned}$$

- Vi vælger nu n , så $\frac{2}{(n+1)!} (0.1)^{n+1} \leq 10^{-5}$. $n = 3$ er nok, idet $\frac{2}{4!} 10^{-4} = \frac{1}{12} 10^{-4} < 10^{-5}$.

2.4 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

- Lad $f(x)$ for alle x være givet ved

$$f(x) = \int_0^x (1+t) \cos(t^3) dt$$

- Vurdér den fejl, der begås ved at erstatte $f(x)$ med dets 2. Taylorpolynomium $P_2(x)$ med udviklingspunkt 0, når $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
- Vi finder

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1+x) \cos(x^3) \\ f''(x) &= \cos(x^3) - (1+x) 3x^2 \sin(x^3) \\ f'''(x) &= -6x(1+2x) \sin(x^3) - 9x^4(1+x) \cos(x^3) \end{aligned}$$

- Heraf findes $P_2(x) = x + \frac{1}{2}x^2$.
- Vha. Maple findes, at $|f'''(x)| \leq 1.59$ for $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Altså fås

$$|f(x) - P_2(x)| \leq 1.59 \cdot \frac{1}{6} |x|^3 \leq 1.59 \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \simeq 0.033$$

Den faktiske maksimale fejl kan findes grafisk til 0.0008.

2.5 Store O-notationen

Store O-notationen

- Når Maplekommandoen $\text{taylor}(\sin(x), x=0, 4)$; som resultat giver $x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$, betyder der følgende:
- Der findes en konstant K , så

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{1}{6}x^3 \right) \right| \leq Kx^4$$

for alle x i et interval med 0 som indre punkt.

- Generelt betyder $f(x) = O(u(x))$ for $x \rightarrow a$, at der findes en konstant K , så

$$|f(x)| \leq K|u(x)|$$

for alle x i et interval med a som indre punkt.

- Vi har eksempelvis: $\sin x = O(x)$, $\sin x = x + O(x^2)$, men også $\sin x = x + O(x^3)$ og den allerede viste.
- I Taylor-sammenhæng kan $O((x - x_0)^n)$ tolkes som led af orden n og højere.

2.6 Lille o-notationen

Lille o-notationen

- Udsagnet $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ betyder, at

$$\frac{\sin x - \left(x - \frac{1}{6}x^3 \right)}{x^3} \rightarrow 0$$

for $x \rightarrow 0$.

- Generelt betyder $f(x) = o(u(x))$ for $x \rightarrow a$, at

$$\frac{f(x)}{u(x)} \rightarrow 0$$

for $x \rightarrow a$.

- Hvis $f(x) = O(x^4)$ for $x \rightarrow 0$ så gælder også $f(x) = o(x^3)$.
- Den omvendte gælder ikke.