DesignMat
Den komplekse eksponentialfunktion og polynomier

Preben Alsholm

Uge 8 Forår 2010

1 Den komplekse eksponentialfunktion

1.1 Definitionen

Definitionen

- Den velkendte eksponentialfunktion
$$x \to e^x$$
vil vi ofte ligesom i Maple give navnet exp. Vi har altså
$$\exp(x) = e^x$$
for alle $x \in \mathbb{R}$.
- Denne funktion har den fundamentale egenskab
$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$
eller anderledes skrevet $e^{x+y} = e^x e^y$ for alle $x, y \in \mathbb{R}$.
- Vi *definerer* nu
$$\exp(x+iy) = \exp x \cdot (\cos y + i \sin y)$$
eller anderledes skrevet
$$e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$
gældende for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

1.2 Egenskaber for exp

Egenskaber for exp

- Når $x, y \in \mathbb{R}$ har e^{x+iy} modulus e^x og argument y:
$$\left|e^{x+iy}\right| = e^x \quad \arg\left(e^{x+iy}\right) = y$$

- For alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gælder

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2 \text{ altså } e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

- Bevis: Sæt $z_1 = x_1 + iy_1$ og $z_2 = x_2 + iy_2$, så har vi:

$$\begin{aligned}
\left|e^{z_1} \cdot e^{z_2}\right| &= \left|e^{z_1}\right| \cdot \left|e^{z_2}\right| = \left|e^{x_1+iy_1}\right| \cdot \left|e^{x_2+iy_2}\right| = e^{x_1} \cdot e^{x_2} \\
&= e^{x_1+x_2} = \left|e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)}\right| = \left|e^{z_1+z_2}\right| \\
\arg\left(e^{z_1} \cdot e^{z_2}\right) &= \arg\left(e^{z_1}\right) + \arg\left(e^{z_2}\right) \\
&= \arg\left(e^{x_1+iy_1}\right) + \arg\left(e^{x_2+iy_2}\right) = y_1 + y_2 \\
&= \arg\left(e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)}\right) = \arg\left(e^{z_1+z_2}\right)
\end{aligned}$$

  Tallene $e^{z_1+z_2}$ og $e^{z_1}e^{z_2}$ har altså samme modulus og samme argument. De er derfor ens.

1.3 Polær form

Polær form

- Den polære form for tallet a med modulus r og argument v blev sidste gang skrevet

$$a = r_v = r(\cos v + i \sin v)$$

  Den vil i fremtiden blive skrevet således:

$$a = r \exp(iv) = re^{iv}$$

- Eksempel. Vi finder den polære form for tallet $-\sqrt{3} - i$. Modulus er $\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$ og et argument er $-\frac{5\pi}{6}$. Tegn! Så

$$-\sqrt{3} - i = 2\exp\left(-i\frac{5\pi}{6}\right) = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

- Maple.

1.4 Moivres formel

Moivres formel

- For $n \in \mathbb{N}$ og $x \in \mathbb{R}$ gælder

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

- Bevis: $(\cos x + i \sin x)^n = \left(e^{ix}\right)^n = e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$

- Eksempel.

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \operatorname{Re}(\cos 3x + i\sin 3x) = \operatorname{Re}\left((\cos x + i\sin x)^3\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x\right) \\
&= \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x = \cos^3 x - 3\cos x\left(1-\cos^2 x\right) \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x
\end{aligned}$$

- Ved ovenfor at erstatte Re med Im fås formlen

$$\begin{aligned}
\sin 3x &= 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x \\
&= 3\left(1-\sin^2 x\right)\sin x - \sin^3 x \\
&= -4\sin^3 x + 3\sin x
\end{aligned}$$

- Maple.

1.5 Den komplekse logaritmefunktion

Den komplekse logaritmefunktion

- exp har ingen omvendt funktion indenfor $\mathbb{C}$, da

$$e^{z+ip2\pi} = e^z \cdot e^{ip2\pi} = e^z\left(\cos(p2\pi) + i\sin(p2\pi)\right) = e^z$$

- Hvis $z, w \in \mathbb{C}$ opfylder $\exp w = z$, så kaldes w *en logaritme* til z. Vi skriver $w = \ln z$.

- Lad $z \in \mathbb{C}$ med $z \neq 0$. Så har z følgende logaritmer

$$\ln z = \ln(|z|) + i(\arg z + p2\pi) = \ln(|z|) + i\arg z + ip2\pi$$

  hvor $p \in \mathbb{Z}$, og $\arg z$ er et argument for z, og hvor $\ln(|z|)$ er den reelle velkendte logaritme af det positive tal $|z|$.

- Vi finder samtlige logaritmer til tallet $a = \sqrt{3} - i$. Da $|a| = 2$ og $\arg a = -\frac{\pi}{6}$ fås (med $p \in \mathbb{Z}$):

$$\ln a = \ln\left(\sqrt{3} - i\right) = \ln 2 - i\frac{\pi}{6} + p2\pi i$$

- Maple.

1.6 Den binome ligning

Den binome ligning I

- Lad $n \in \mathbb{N}$ og $a \in \mathbb{C}$. En *binom ligning* har formen

$$z^n = a \tag{1}$$

- Løsningerne til (1) kaldes komplekse n'te rødder af a.
- Rødderne i (1), hvor $a = re^{iv}$, $r \geq 0$, $v \in \mathbb{R}$, er givet ved

$$z = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{v}{n} + p\frac{2\pi}{n}\right)}, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

- Bevis: Sæt $z = \rho e^{i\theta}$, med $\rho \geq 0$ og $\theta \in \mathbb{R}$. Ved indsættelse i (1) fås

$$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = re^{iv} \text{ og hermed } \rho^n e^{in\theta} = re^{iv}$$

  De to sider af denne ligning er polære former af samme tal, så $\rho^n = r$ og $n\theta = v + p2\pi$, hvor $p \in \mathbb{Z}$. Heraf følger formlen.

- Korollar. Er z_0 en rod i ligningen $z^n = a$, så er samtlige rødder givet ved $z = z_0 e^{ip\frac{2\pi}{n}}, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$

2 Rødder i polynomier

2.1 Andengradsligningen I

Andengradsligning I

- Vi løser

$$az^2 + bz + c = 0$$

  hvor $a, b, c \in \mathbb{C}$, og $a \neq 0$.

- Vi har:

$$az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

- Andengradsligningen kan altså omskrives til

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

- Sæt $w = z + \frac{b}{2a}$, så har vi den binome ligning

$$w^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

2.2 Andengradsligningen II

Andengradsligning II

- Sæt $w = z + \frac{b}{2a}$, så har vi den binome ligning

$$w^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

- Denne har 2 (komplekse) rødder, som vi skriver som

$$\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

- Så rødderne i andengradsligningen $az^2+bz+c=0$ er

$$z=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- Eksempel. Løs ligningen $z^2+z+1=0$. Vi finder

$$z=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}=\begin{cases}\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

2.3 Andengradsligningen III

Andengradsligning III

- Eksempel. Løs ligningen $z^2-2z+(1+i)=0$. Vi finder

$$z=\frac{2\pm\sqrt{4-4(1+i)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-4i}}{2}$$

- Vi skal så løse den binome ligning $w^2=-4i=4\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right)$. Vi finder

$$\begin{aligned} w &= \pm 2\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \pm 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\pm\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

- Løsningerne til andengradsligningen er dermed

$$z=\frac{2\pm\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)}{2}=1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)=\begin{cases}1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\\ 1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

2.4 Polynomier generelt

Polynomier generelt

- Et polynomium i den variable z er et udtryk af formen

$$a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0$$

- **Algebraens Fundamentalsætning**. Ethvert polynomium af grad ≥ 1 har mindst én rod indenfor de komplekse tal.
- Generelle løsningsformler findes for $n\leq 4$, men det kan bevises, at der ikke kan konstrueres generelle løsningsformler for $n\geq 5$.
- Husk dog, at et polynomium af vilkårlig høj grad men med kun to led kan løses ved en formel, der umiddelbart giver den polære form for løsningerne.
- Se Maple om 3. og 4. gradsligninger.

2.5 Faktorisering af polynomier I

Faktorisering af polynomier I

- En rod z_1 i polynomiet p har *multipliciteten* k, hvis $p(z) = (z - z_1)^k q(z)$, hvor $q(z)$ er et polynomium, og hvor z_1 ikke er rod i $q(z)$.
- Hvis multipliciteten er 1, siges roden at være *simpel*.
- Eksempel. $5z^4 - 50z^3 + 120z^2 + 160z - 640 = 5(z-4)^3(z+2)$. Så 4 er rod af multiplicitet 3, og -2 er rod af multiplicitet 1. -2 er altså en simpel rod.
- Polynomiet $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, hvor $n \geq 1$ (og $a_n \neq 0$) kan skrives som et produkt af a_n og n førstegradsfaktorer:

$$p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$$

- Ethvert polynomium af grad $n \geq 1$ har altså n rødder, hvis disse regnes med multiplicitet.

2.6 Faktorisering af polynomier II

Faktorisering af polynomier II

- Hvis et polynomium har reelle koefficienter og $z_1 \in \mathbb{C}$ er rod, så er også $\overline{z_1}$ rod.
- Ethvert polynomium af grad $n \geq 1$ og med reelle koefficienter kan skrives som et produkt af reelle første- og andengradsfaktorer.
- Eksempel. Hvis $2 + 3i$ er rod, så er $2 - 3i$ også.
- Så begge faktorerne $(z - (2+3i))$ og $(z - (2-3i))$ forekommer i en faktorisering af polynomiet.
- Vi betragter produktet af disse to faktorer:

$$(z - (2+3i))(z - (2-3i))$$

- Sætter andre parenteser:

$$= ((z-2) - 3i)((z-2) + 3i)$$

- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ bruges:

$$= (z-2)^2 + 3^2 = z^2 - 4z + 13$$

3 Eulers formler

Eulers formler I

- Ifølge definitionen af den komplekse eksponentialfunktion har vi

$$\begin{aligned} e^{iv} &= \cos v + i \sin v \\ e^{-iv} &= \cos v - i \sin v \end{aligned}$$

- Ved addition af disse formler og efter division med 2 fås

$$\cos v = \frac{1}{2}\left(e^{iv} + e^{-iv}\right)$$

- Tilsvarende fås ved subtraktion og division med $2i$

$$\sin v = \frac{1}{2i}\left(e^{iv} - e^{-iv}\right)$$

3.1 Eulers formler II

Eulers formler II

- Vi ønsker $\sin^4 x$ udtrykt ved $\sin x, \sin 2x, \ldots, \cos x, \cos 2x, \ldots$.
- Vi udnytter den ene af Eulers formler

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

- og vi finder dermed

$$\sin^4 x = \left(\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right)^4 = \frac{1}{(2i)^4}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^4$$

- Binomialformlen $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ benyttes:

$$= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right)$$

- $$= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} + e^{-4ix} - 4\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right) + 6\right)$$

- $$= \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$

3.2 Eulers formler III

Eulers formler III

- Så
$$\sin^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$
- Ved hjælp af denne formel beregnes integralet
$$\int_0^{\pi} \sin^4 x dx$$
- som følger
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin^4 x dx &= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x\right]_0^{\pi} = \frac{3\pi}{8}\end{aligned}$$