DesignMat
Lineære differentialligninger I

Preben Alsholm

Uge 9 Forår 2010

1 Lineære differentialligninger af første orden

1.1 Normeret lineær differentialligning

Normeret lineær differentialligning

- En differentialligning, der kan skrives på formen

$$a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t) \tag{1}$$

  hvor $t \in I$, kaldes *lineær*.

- Når (1) har den specielle form

$$x' + p(t)\,x = q(t) \tag{2}$$

  siges den at være normeret.

- Eksempel 1. Differentialligningen

$$tx' + 2x = te^{-t} \tag{3}$$

  hvor $t \in \mathbb{R}_+$, er lineær, men ikke normeret. Ved normering fås

$$x' + \frac{2}{t}x = e^{-t}$$

1.2 Panserformlen

Panserformlen

- Lad $p, q \in C(I)$ hvor I er et interval. Så er den fuldstændige løsning til $x' + p(t)\,x = q(t)$ givet ved

$$x(t) = e^{-P(t)} \int e^{P(t)} q(t)\,dt + Ce^{-P(t)} \tag{4}$$

  hvor P er en vilkårligt valgt stamfunktion til p, og hvor $C \in \mathbb{R}$ er en arbitrær konstant.

- Bevis: Da $e^{P(t)} > 0$ for alle $t \in I$, har $x' + p(t)x = q(t)$ de samme løsninger som

$$x'(t)e^{P(t)} + p(t)e^{P(t)}x(t) = e^{P(t)}q(t)$$

- Men dette kan skrives $\frac{d}{dt}\left(e^{P(t)}x(t)\right) = e^{P(t)}q(t)$,
- hvilket er ensbetydende med, at $e^{P(t)}x(t)$ er en stamfunktion til $e^{P(t)}q(t)$, dvs. ensbetydende med eksistensen af en konstant $C \in \mathbb{R}$, så

$$e^{P(t)}x(t) = \int e^{P(t)}q(t)\,dt + C$$

1.3 Eksempel 1

Eksempel 1

- Eksempel 1. Vi betragter for $t > 0$ den normerede differentialligning

$$x' + \frac{2}{t}x = e^{-t}$$

- Vi har $p(t) = \frac{2}{t}, q(t) = e^{-t}$. Panserformlens P er givet ved $P(t) = \int \frac{2}{t}dt = 2\ln t$.
- Så $e^{P(t)} = e^{2\ln t} = t^2$ og $e^{-P(t)} = t^{-2}$. Hermed er den fuldstændige løsning

$$\begin{aligned} x(t) &= t^{-2}\int t^2e^{-t}dt + Ct^{-2} \\ &= t^{-2}\left(-t^2e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t}\right) + Ct^{-2} \\ &= -\left(1 + \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}\right)e^{-t} + \frac{C}{t^2} \end{aligned}$$

  hvor $C \in \mathbb{R}$.

1.4 Eksempel 1 (fortsat)

Eksempel 1 (fortsat)

- Løsningerne kan skrives $x(t) = \frac{1}{t^2}\left(-e^{-t}\left(t^2 + 2t + 2\right) + C\right)$ med $t > 0$ og med $C \in \mathbb{R}$.
- Vi undersøger løsningerne for $t \downarrow 0$ (dvs. $t \to 0^+$).
- Da $-e^{-t}\left(t^2 + 2t + 2\right) + C \to -2 + C$ for $t \downarrow 0$, ser vi, at $x(t) \to \infty$, når $C > 2$ og $x(t) \to -\infty$, når $C < 2$.
- Hvis $C = 2$, vil tælleren i $x(t)$ gå mod nul, men det samme gør nævneren.

- Taylors grænseformel på tælleren $-e^{-t}\left(t^2+2t+2\right)+2$ giver

$$-e^{-t}\left(t^2+2t+2\right)+2=\frac{1}{3}t^3+O\left(t^4\right)$$

- Heraf følger

$$x(t)=\frac{\frac{1}{3}t^3+O\left(t^4\right)}{t^2}=\frac{1}{3}t+O\left(t^2\right)\to 0$$

for $t\downarrow 0$.

1.5 Eksistens- og entydighed

Eksistens- og entydighed

- Lad $p,q\in C(I)$, hvor I er et interval. Lad $t_0\in I$ og $x_0\in\mathbb{R}$. *Begyndelsesværdiproblemet*

$$x'+p(t)x=q(t)\ \text{ med } x(t_0)=x_0$$

har netop én løsning og den er defineret på hele intervallet I.

- Den omtalte løsning kan, når P vælges som $P(t)=\int_{t_0}^t p(s)\,ds$ skrives

$$x(t)=e^{-P(t)}\int_{t_0}^t e^{P(s)}q(s)\,ds+x_0e^{-P(t)}$$

- Beviset består blot i at bruge bestemt integration i beviset for panserformlen ovenfor.

2 Lineære Differentialligninger af anden orden

2.1 Eksistens- og entydighed

Eksistens- og entydighed

- Vi betragter *lineære differentialligninger med konstante koefficienter*:

$$ax''+bx'+cx=q(t)\tag{5}$$

med $q\in C(I)$, hvor I er et interval. a,b,c er reelle konstanter og $a\neq 0$.

- Sætning. Lad $t_0\in I$ og $x_0,v_0\in\mathbb{R}$. *Begyndelsesværdiproblemet* for (5) med $x(t_0)=x_0$ og $x'(t_0)=v_0$ har netop én løsning og den er defineret på hele intervallet I.
- Beviset springer vi over.
- Eksempel. Den løsning til differentialligningen $x''+3x'+2x=20te^{3t}$, der opfylder $x(0)=0, x'(0)=-\frac{4}{5}$ er

$$x(t)=\left(t-\frac{9}{20}\right)e^{3t}+\frac{9}{20}e^{-t}$$

- Hvordan?

2.2 Den homogene ligning I

Den homogene ligning I

- Vi betragter nu specialtilfældet hvor højresiden $q(t) = 0$. En sådan lineær differentialligning kaldes *homogen*:

$$ax'' + bx' + cx = 0 \tag{6}$$

  Stadig er a, b, c reelle konstanter og $a \neq 0$.

- Vi begynder med at finde løsninger af formen $x(t) = e^{Rt}$, hvor R er en (muligvis kompleks) konstant.

- Vi har $x' = R\, e^{Rt}, x'' = R^2\, e^{Rt}$. Ved indsættelse i (6) fås

$$\left(aR^2 + bR + c\right) e^{Rt} = 0$$

- Dette betyder, at $x(t) = e^{Rt}$ er løsning til (6) hvis og kun hvis

$$aR^2 + bR + c = 0 \tag{7}$$

- (7) kaldes karakterligningen for (6).

2.3 Den homogene ligning II

Den homogene ligning II

- Sætning. Hvis f_1 og f_2 er løsninger til $ax'' + bx' + cx = 0$, så er også $f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$ løsning, når blot c_1, c_2 er konstanter.

- Sætning. Lad f_1 og f_2 være løsninger til $ax'' + bx' + cx = 0$. Så er den fuldstændige løsning givet ved

$$x(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \tag{8}$$

  hvis og kun hvis der findes et $t_0 \in \mathbb{R}$ så Wronskideterminanten

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} f_1(t_0) & f_2(t_0) \\ f_1'(t_0) & f_2'(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

- Bevis. Som vist er enhver linearkombination af formen (8) løsning. Vi skal vise, at der ikke er andre.

- Lad da $x = f(t)$ være en løsning til $ax'' + bx' + cx = 0$. Vi skal vise, at der findes konstanter c_1, c_2, så $f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$.

2.4 Den homogene ligning III

Den homogene ligning III

- Men sådanne konstanter må opfylde det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} c_1 f_1(t_0) + c_2 f_2(t_0) &= f(t_0) \\ c_1 f_1'(t_0) + c_2 f_2'(t_0) &= f'(t_0) \end{aligned}$$

- Dette system har løsning for enhver højreside netop når dets determinant $W(t_0) \neq 0$. Men funktionen $g(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$ og $f(t)$ opfylder samme begyndelsesbetingelser i t_0. I følge entydighedssætningen har vi derfor $f = g$.
- Sætning. Der findes to løsninger f_1 og f_2 til $ax'' + bx' + cx = 0$ for hvilke $W(t) \neq 0$.
- Bevis: Her bruger vi eksistensdelen af eksistens- og entydighedssætningen. Vælg f_1 og f_2 som løsninger, der opfylder $f_1(0) = 1, f_1'(0) = 0$ og $f_2(0) = 0, f_2'(0) = 1$. Så gælder $W(0) = 1 \neq 0$.

2.5 Den homogene ligning: Eksempel 1

Den homogene ligning: Eksempel 1

- Eksempel. $x'' + 3x' + 2x = 0$ har karakterligningen $R^2 + 3R + 2 = 0$ med rødderne -2 og -1.
- Altså er $\phi_1(t) = e^{-2t}$ og $\phi_2(t) = e^{-t}$ løsninger til $x'' + 3x' + 2x = 0$. Deres Wronskideterminant er

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-t} \\ -2e^{-2t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = e^{-3t} \neq 0$$

- Så den fuldstændige løsning er $x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$, hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
- Generelt for to forskellige reelle rødder r_1 og r_2. Fuldstændige løsning $x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$, hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2.6 Den homogene ligning: Eksempel 2

Den homogene ligning: Eksempel 2

- Eksempel. $x'' - 6x' + 9x = 0$ har karakterligningen $R^2 - 6R + 9 = 0$ med dobbeltroden 3.
- Altså er $\phi_1(t) = e^{3t}$ løsning til $x'' + 3x' + 2x = 0$. Men vi mangler en anden.
- En anden er $\phi_2(t) = te^{3t}$, hvilket ses ved simpel indsættelse.
- Wronskideterminanten er

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 3e^{3t} & e^{3t} + 3te^{3t} \end{vmatrix} = e^{6t} \neq 0$$

- Så den fuldstændige løsning er $x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$, hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
- Generelt for dobbeltrod r. Fuldstændig løsning $x(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$, hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2.7 Den homogene ligning: Eksempel 3

Den homogene ligning: Eksempel 3

- Eksempel. $x'' + 2x' + 5x = 0$ har karakterligningen $R^2 + 2R + 5 = 0$ med de imaginære rødder $-1 \pm 2i$.
- Altså er $e^{(-1+2i)t}$ og $e^{(-1-2i)t}$ løsninger. Men de er jo imaginære!
- Realdelen $\phi_1(t) = \operatorname{Re} e^{(-1+2i)t} = e^{-t}\cos(2t)$ og imaginærdelen $\phi_2(t) = \operatorname{Im} e^{(-1+2i)t} = e^{-t}\sin(2t)$, er også løsninger!
- Wronskideterminanten for disse er $\begin{vmatrix} e^{-t}\cos(2t) & e^{-t}\sin(2t) \\ -e^{-t}(\cos(2t) + 2\sin(2t)) & -e^{-t}(\sin(2t) - 2\cos(2t)) \end{vmatrix} = 2e^{-2t} \neq 0$.
- Så den fuldstændige løsning er $x(t) = c_1 e^{-t}\cos(2t) + c_2 e^{-t}\sin(2t)$, hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
- Generelt for imaginære rødder $\alpha \pm i\beta$. Fuldstændig løsning $x(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2.8 Den inhomogene ligning I

Den inhomogene ligning I

- Vi betragter nu den inhomogene ligning
$$ax'' + bx' + cx = q(t) \qquad (\textit{Inhomogen})$$
og den tilsvarende homogene ligning
$$ax'' + bx' + cx = 0 \qquad (\textit{Homogen})$$
- Sætning. Lad ψ_1 og ψ_2 være løsninger til *Inhomogen*. Så er $\phi = \psi_1 - \psi_2$ en løsning til *Homogen*.
- Sætning. Lad ψ_1 være en løsning til *Inhomogen* og ϕ en løsning til *Homogen*. Så er $\psi_2 = \psi_1 + \phi$ en løsning til *Inhomogen*.
- Opskrift på fuldstændige løsning til *Inhomogen*.
  1. Find den fuldstændige løsning til *Homogen*. Denne løsning vil indeholde to arbitrære konstanter.
  2. Find bare én løsning til *Inhomogen*. En sådan løsning kaldes en partikulær løsning til *Inhomogen*.
  3. Den fuldstændige løsning til *Inhomogen* er summen af den fundne partikulære løsning til *Inhomogen* og den fuldstændige løsning til *Homogen*.

2.9 Den inhomogene ligning II

Den inhomogene ligning II

- Betragt den inhomogene ligning

$$ax'' + bx' + cx = q_1(t) + q_2(t) \qquad (\textit{Inhomogen})$$

- Antag, at ψ_1 er løsning til $ax'' + bx' + cx = q_1(t)$ og ψ_2 løsning til $ax'' + bx' + cx = q_2(t)$.
- Superpositionsprincippet. Så er $\psi = \psi_1 + \psi_2$ løsning til *Inhomogen*.
- Bevis:

$$\begin{aligned} & a\psi'' + b\psi' + c\psi \\ = \; & a(\psi_1 + \psi_2)'' + b(\psi_1 + \psi_2)' + c(\psi_1 + \psi_2) \\ = \; & \left(a\psi_1'' + b\psi_1' + c\psi_1\right) + \left(a\psi_2'' + b\psi_2' + c\psi_2\right) \\ = \; & q_1(t) + q_2(t) \end{aligned}$$

2.10 Eksempel 1

Eksempel 1

- Vi fandt, at den løsning til $x'' + 3x' + 2x = 20te^{3t}$, der opfylder $x(0) = 0, x'(0) = -\frac{4}{5}$ er
$$x(t) = \left(t - \frac{9}{20}\right)e^{3t} + \frac{9}{20}e^{-t}$$
- Den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning er $x(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{-t}$, hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
- Altså er den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning $x(t) = \left(t - \frac{9}{20}\right)e^{3t} + \frac{9}{20}e^{-t} + c_1e^{-2t} + c_2e^{-t}$hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
- Dette kan skrives mere kompakt som $x(t) = \left(t - \frac{9}{20}\right)e^{3t} + c_1e^{-2t} + c_2e^{-t}$, hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Bemærk, at $x(t) = \left(t - \frac{9}{20}\right)e^{3t}$ er en særlig simpel løsning til den inhomogene ligning.

2.11 Eksempel 2

Eksempel 2

- Betragt differentialligningen $x'' + 3x' + 2x = 4t^2$. Den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning er $x(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{-t}$, hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
- En partikulær løsning er $x(t) = 2t^2 - 6t + 7$.
- En partikulær løsning til $x'' + 3x' + 2x = 20te^{3t}$ er $x(t) = \left(t - \frac{9}{20}\right)e^{3t}$.
- En partikulær løsning til $x'' + 3x' + 2x = 4t^2 + 20te^{3t}$ er derfor $x(t) = 2t^2 - 6t + 7 + \left(t - \frac{9}{20}\right)e^{3t}$.

- Altså er den fuldstændige løsning til $x'' + 3x' + 2x = 4t^2 + 20te^{3t}$

$$x\left(t\right) = 2t^2 - 6t + 7 + \left(t - \frac{9}{20}\right)e^{3t} + c_1e^{-2t} + c_2e^{-t}$$

hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.