# DesignMat Uge 1
# Gensyn med forårets stof

Preben Alsholm

Efterår 2010

## 1 Hovedpunkter fra forårets pensum

### 1.1 Taylorpolynomium

**Taylorpolynomium**

- Det n'te Taylorpolynomium for $f$ med udviklingspunkt $x_0$ :

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \end{aligned}$$

- Dette kan også skrives

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

idet vi definerer $0! = 1$ og $f^{(0)} = f$.

### 1.2 Lineært ligningssystem

**Lineært ligningssystem**

- Et lineært ligningssystem:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- Koefficientmatrix, Totalmatrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

## 1.3 Gausselimination

**Gausselimination**

- Tilladte operationer på rækkerne i totalmatricen:
  1. $R_i \leftrightarrow R_j$
  2. $R_i := cR_i$ hvor $c \neq 0$
  3. $R_i := R_i + cR_j$ hvor $i \neq j$.
- Vi vil ved rækkeoperationer bringe matricen på echelonform:

$$\begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & \# & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & \# \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 1.4 Matrixmultiplikation

**Matrixmultiplikation**

- $A$ en $m \times n$-matrix, og $x \in \mathbb{R}^n$. Skriv $A = [a_1\ a_2\ \dots\ a_n]$, hvor $a_i \in \mathbb{R}^m$. Så definerer vi produktet $Ax$ ved

$$Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n$$

- Ligningssystemet med koefficientmatricen $A$ og højresiden $b$ kan nu skrives $Ax = b$.
- Alternativ udregning af $Ax$: Skalarprodukterne af rækkerne i $A$ med søjlen $x$.
- Multiplikation af matricer: $A$ er $m \times n$ og $B$ er $n \times p$: $AB = A\left[b_1\ b_2\ \dots\ b_p\right] = \left[Ab_1\ Ab_2\ \dots\ Ab_p\right]$.
- Ækvivalent definition (der bruges i JE): $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{21} + \ldots + a_{in} b_{n1}$.

## 1.5 Invers matrix

### Invers matrix

- *Definition.* $A$ er invertibel, hvis der findes en matrix $C$, så $AC = CA = I$.
- Den inverse af $A$ betegnes med $A^{-1}$.
- Matricen $A$ er invertibel hvis og kun hvis $A$ er regulær.
- Matricen $A^{-1}$ er entydigt bestemt som løsningen $C$ til $AC = I$.
- Algoritme: Gausselimnationen $[A \mid I] \longrightarrow [I \mid C]$.
- $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A, \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \qquad \left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

## 1.6 Determinant

### Determinant

- Lad $A$ være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- *Definition.* $\det A = \sum_{S_n} sgn\,(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$, hvor $S_n$ betegner mængden af permutationer $S_n$ af tallene $1, 2, \dots, n$.
- Der gælder om rækkeoperationer, at
  1. $R_i \longleftrightarrow R_j$ $(i \neq j)$ skifter fortegn på determinanten.
  2. $R_i := kR_i$ gør determinanten $k$ gange større.
  3. $R_i := R_i + kR_j$ $(i \neq j)$ ændrer ikke determinantens værdi.
- $A$ er regulær, hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B), \qquad \det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}, \qquad \det\left(A^T\right) = \det A$.

## 1.7 Komplement til matrix

### Komplement til matrix

- Determinanten af $A$ kan udregnes således (*udvikling i komplementer langs første række)*:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} - \\ &\quad \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} K_{1j} \end{aligned}$$

- hvor $(i, j)$-komplementet til $A$ er defineret ved $K_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.
- Mere generelt gælder: $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}K_{ij}$ for ethvert $i$ og $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}K_{ij}$ for ethvert $j$.

## 1.8 Egenværdier og egenvektorer for matricer

**Egenværdier og egenvektorer for matricer**

- Lad $A$ være en kvadratisk matrix. Tallet $\lambda$ kaldes en *egenværdi* for $A$, hvis der findes en vektor $v \neq 0$, så
$$Av = \lambda v \tag{1}$$
- En vektor $v$, der opfylder (1), kaldes en *egenvektor* hørende til egenværdien $\lambda$.
- Egenværdierne for $A$ er rødderne i *karakterpolynomiet* $\det (A - \lambda I)$.
- Egenværdier og spor og determinant:
$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n &= spor\,(A) \\ \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n &= \det A \end{aligned}$$
- Hvis roden $\lambda_1$ har multiplicitet $k$ i $p(\lambda)$, så har egenværdien $\lambda_1$ *algebraisk multiplicitet* $k$.
- Hvis matricen $A - \lambda_1 I$ har rang $n - j$, så har $\lambda_1$ *geometrisk multiplicitet* $j$.
- Den geometriske multiplicitet er lig med antallet af frie parametre i løsningerne til $(A - \lambda_1 I)\, x = 0$.

## 1.9 Komplekse tal

**Komplekse tal**

- $\mathbb{C}$ er mængden af punkter i planen. Planen identificeres med $\mathbb{R}^2$, så $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.
- Tallet $i = (0, 1)$ er den imaginære enhed.
- Multiplikationen indføres så $i^2 = -1$ og samtlige kendte regneregler fra de reelle tal stadig gælder.
- $a = (a_1, a_2)$ skrives nu $a = a_1 + ia_2$.
- Realdel: $\operatorname{Re} a = a_1$. Imaginærdel: $\operatorname{Im} a = a_2$. $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ (modulus, absolutværdi, numerisk værdi).
- Kompleks konjugation: $\bar{a} = \overline{a_1 + ia_2} = a_1 - ia_2$.
- $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}, \qquad \overline{(ab)} = \bar{a}\bar{b}$.
- $|ab| = |a|\,|b|\,, \qquad |a^n| = |a|^n$.
- $\arg(ab) = \arg a + \arg b, \qquad \arg(a^n) = n \arg a, \qquad \arg\left(\frac{a}{b}\right) = \arg a - \arg b$.

## 1.10 Kompleks eksponentialfunktion

**Kompleks eksponentialfunktion**

- *Definition:* $\exp(x+iy) = \exp x \cdot (\cos y + i \sin y)$ altså $e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$.
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$ altså $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.
- Polær form: $a = re^{iv}$, hvor $r = |a|$ og $v = \arg a$.
- Eulers formler: $\cos v = \frac{1}{2}\left(e^{iv} + e^{-iv}\right)$, $\qquad \sin v = \frac{1}{2i}\left(e^{iv} - e^{-iv}\right)$.
- Den binome ligning $z^n = a = re^{iv}$ har løsningerne $z = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{v}{n} + p\frac{2\pi}{n}\right)}$, $\qquad p = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

## 1.11 Polynomier

**Polynomier**

- Rødderne i andengradsligningen $az^2 + bz + c = 0$ er som sædvanligt $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
- **Algebraens Fundamentalsætning**. Ethvert polynomium af grad $\geq 1$ har mindst én rod indenfor de komplekse tal.
- Roden $z_1$ i polynomiet $p$ har multipliciteten $k$, hvis $p(z) = (z - z_1)^k q(z)$, hvor $q(z_1) \neq 0$.
- Polynomiet $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, hvor $n \geq 1$ (og $a_n \neq 0$) kan skrives $p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$.
- Hvis et polynomium har reelle koefficienter og $z_1 \in \mathbb{C}$ er rod, så er også $\overline{z_1}$ rod.

## 1.12 Differentialligning af 1. orden

**Lineær differentialligning af 1. orden**

- Differentialligningen $a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t)$, hvor $t \in I$ er lineær og af første orden.
- Differentialligningen $x' + p(t)\,x = q(t)$ er normeret.
- Den fuldstændige løsning til $x' + p(t)\,x = q(t)$ er givet ved $x(t) = e^{-P(t)} \int e^{P(t)} q(t)\,dt + Ce^{-P(t)}$, hvor $P(t) = \int p(t)\,dt$.
- Når $p, q \in C(I)$ og$t_0 \in I$ og $x_0 \in \mathbb{R}$., så har begyndelsesværdiproblemet $x' + p(t)\,x = q(t)$ med $x(t_0) = x_0$ præcis én løsning.

## 1.13 Differentialligning af 2. orden

### Lineær differentialligning af 2. orden med konstante koefficienter

- Betragter $ax'' + bx' + cx = q(t)$ med $q \in C(I)$, hvor $I$ er et interval og $a, b, c \in \mathbb{R}$ og $a \neq 0$.
- Lad $t_0 \in I$ og $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$. Begyndelsesværdiproblemet bestående af differentialligningen med $x(t_0) = x_0$ og $x'(t_0) = v_0$ har netop én løsning og den er defineret på hele intervallet $I$.
- Når $q(t) = 0$ kaldes differentialligningen homogen.
- Karakterligningen $aR^2 + bR + c = 0$.
- To forskellige reelle rødder $r_1$ og $r_2$. Fuldstændige løsning $x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$, hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
- Dobbeltrod $r$. Fuldstændig løsning $x(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$, hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
- Imaginære rødder $\alpha \pm i\beta$. Fuldstændig løsning $x(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$, hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
- Den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning er summen af en partikulær løsning og den fuldstændige løsning til den homogene ligning.

## 1.14 Partikulær løsning ved kompleks gættemetode

### Partikulær løsning ved kompleks gættemetode

- Differentialligningen $x'' + 3x' + 2x = 10 \cos t$ erstattes af $x'' + 3x' + 2x = 10e^{it}$.
- Ansats til en partikulær løsning $x_p(t) = Ae^{it}$ indsættes i differentialligningen.
- Heraf fås $A = 1 - 3i$. Partikulær løsning til den komplekse ligning $x_p(t) = (1 - 3i) e^{it}$.
- Så partikulær løsning til den oprindelige ligning er $x_p(t) = \mathrm{Re}\left((1 - 3i) e^{it}\right) = \cos t + 3 \sin t$.

## 1.15 Vektorrum

### Vektorrum

- Lad $\mathbb{L}$ betegne $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Lad $V$ være en ikke tom mængde udstyret med en *addition* '$+$' og en *multiplikation med skalar*.
- Vi forlanger, at disse to operationer opfylder

$$\begin{aligned} a, b &\in V \Longrightarrow a + b \in V \\ s &\in \mathbb{L} \wedge a \in V \Longrightarrow sa \in V \end{aligned}$$

- Desuden forlanger vi for alle $a, b, c \in V$ og $s, t \in \mathbb{L}$:

$$\begin{aligned} a + b &= b + a, \qquad (a + b) + c = a + (b + c) \\ \exists 0 &\in V \text{ så } a + 0 = a, \qquad \exists a_1 \in V \text{ så } a + a_1 = 0 \\ s\,(ta) &= (st)\,a, \qquad (s + t)\,a = sa + ta \\ s\,(a + b) &= sa + sb, \qquad 1a = a \end{aligned}$$

- $V$ er da et *vektorrum* over $\mathbb{L}$. Hvis $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ er $V$ et *reelt* vektorrum. Hvis $\mathbb{L} = \mathbb{C}$ er $V$ et *komplekst* vektorrum.

## 1.16 Underrum, Linearkombination

**Underrum, Linearkombination**

- Hvis $U$ er en delmængde af vektorrummet $V$, og $U$ med de arvede operationer selv er et vektorrum, så kaldes $U$ et *underrum* af $V$.
- Sætning. Lad $U \subseteq V$ og $U \neq \varnothing$. Så er $U$ et underrum af $V$ hvis og kun hvis

$$\begin{aligned} a, b &\in U \Longrightarrow a + b \in U \\ s &\in \mathbb{L} \wedge a \in U \Longrightarrow sa \in U \end{aligned}$$

- *Trivielle* underrum af vektorrum $V$ er $V$ selv og $\{0\}$.
- Ved en af *linearkombination* af vektorerne $a_1, a_2, \ldots, a_p \in V$ forstås et udtryk af formen
$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_p a_p$$
hvor $c_1, c_2, \ldots, c_p \in \mathbb{L}$.
- Ved *span* $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ forstås mængden af linearkombinationer af vektorerne $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

## 1.17 Lineær uafhængighed, basis

**Lineær uafhængighed, basis**

- *span* $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ er et underrum af $V$. Det er det mindste underrum, der indeholder $a_1, a_2, \ldots, a_p$.
- Vektorerne $a_1, a_2, \ldots, a_p \in V$ siges at være *lineært uafhængige* hvis
$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_p a_p = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$$
- $a_1, a_2, \ldots, a_p$ er altså lineært uafhængige, hvis $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_p v_p$ kun kan være nul, når alle koefficienterne er nul.
- Hvis vektorerne $a_1, a_2, \ldots, a_p$ ikke er lineært uafhængige, siges de at være *lineært afhængige*.
- En *basis* for et vektorrum $V$ er et lineært uafhængigt system $a_1, a_2, \ldots, a_n$ af vektorer, som udspænder $V$, altså $V = span\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

## 1.18 Koordinater

**Koordinater mht. basis**

- Lad $a_1, a_2, \ldots, a_n$ være en basis for $V$. Så kan ethvert $v \in V$ skrives entydigt som en linearkombination af $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$v = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n$$

- Talsættet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kaldes koordinaterne for $v$ mht. basen $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

- Betegnelse: $K_a(v)$ for koordinaterne af $v$ mht. basen $a$. $K_a(v) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

- Matricen ${}_aV = \begin{bmatrix} K_a(v_1) & K_a(v_2) & \ldots & K_a(v_p) \end{bmatrix}$, kaldes koordinatmatricen for $v_1, v_2, \ldots, v_p$ mht. basis $a = a_1, a_2, \ldots, a_n$.

- Da $x_1 v_1 + \ldots + x_p v_p = 0 \Leftrightarrow {}_aVx = 0$ er $v_1, v_2, \ldots, v_p$ lineært uafhængige netop hvis ${}_aVx = 0$ kun har nulløsningen.