DesignMat Uge 4
Systemer af lineære differentialligninger I

Preben Alsholm

Efterår 2010

1 Lineære differentialligningssystemer

1.1 Homogent lineært differentialligningssystem af første orden I

Homogent lineært differentialligningssystem af første orden I

- Et lineært og homogent system af n differentialligninger med n ubekendte funktioner $x_1, x_2, \ldots, x_n$ af første orden og med *konstante* koefficienter kan skrives på formen

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\
\dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t)
\end{aligned}$$

- Vi skal antage, at alle koefficienterne a_{ij} er reelle.
- Lad A være matricen af koefficienter

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

1.2 Homogent lineært differentialligningssystem af første orden II

Homogent lineært differentialligningssystem af første orden II

- Lad $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$.

- Systemet kan nu skrives
$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$
- Tit lader man den uafhængige variable t være underforstået og skriver blot $\dot{x} = Ax$.
- Vi kan naturligvis let løse systemet, når $n = 1$. Systemet består blot af en enkelt differentialligning med én ubekendt funktion $\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t)$.
- eller enklere: $\dot{x}(t) = ax(t)$. Løsning: $x(t) = Ce^{at}$, hvor C er en arbitrær reel konstant.
- Så let går det ikke, når $n > 1$, bortset fra det specielle tilfælde, hvor A er en diagonalmatrix.

1.3 Afkobling I

Afkobling I

- Antag nu, at A er diagonaliserbar med $\Lambda = V^{-1}AV$ diagonal, $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ og $V = [v_1\ v_2\ \ldots\ v_n]$.
- Så fås $A = V\Lambda V^{-1}$ og systemet $\dot{x}(t) = Ax(t)$ kan skrives
$$\dot{x}(t) = V\Lambda V^{-1}x(t)$$
- Definér en ny vektorfunktion y ved $y(t) = V^{-1}x(t)$.
- Så fås
$$\dot{y}(t) = \Lambda y(t)$$
- Dette system er *afkoblet*:
$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= \lambda_1 y_1(t)\\ \dot{y}_2(t) &= \lambda_2 y_2(t)\\ &\vdots\\ \dot{y}_n(t) &= \lambda_n y_n(t)\end{aligned}$$

1.4 Afkobling II

Afkobling II

- Det afkoblede system har den fuldstændige løsning
$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1e^{\lambda_1 t} \\ c_2e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_ne^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

- hvor $c_1, c_2, \ldots, c_n$ er arbitrære konstanter.
- Husk, at egenværdierne eventuelt kunne være komplekse!
- Heraf fås

$$\begin{aligned} x(t) &= Vy(t) = [v_1\ v_2\ \ldots\ v_n] \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} v_n \end{aligned}$$

1.5 Eksempel 1

Eksempel 1

- Betragt differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -5x_1(t) - 3x_2(t) + 3x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -3x_1(t) - 5x_2(t) + 3x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -9x_1(t) - 9x_2(t) + 7x_3(t) \end{aligned}$$

- Dette kan skrives $\dot{x} = Ax$, hvor $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$.
- Egenværdierne for A er -2 (med algebraisk multiplicitet 2) og 1.
- Basis for egenrummet hørende til -2 er (v_1, v_2), hvor $v_1 = [-1\ 1\ 0]^T$ og $v_2 = [1\ 0\ 1]^T$.
- En basis for egenrummet hørende til egenværdien 1 er (v_3), hvor $v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$.
- Vi konstaterer, at A er diagonaliserbar.

1.6 Eksempel 1 (fortsat)

Eksempel 1 (fortsat)

- Den fuldstændige løsning til systemet $\dot{x} = Ax$ er derfor

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 \\ &= c_1 e^{-2t} v_1 + c_2 e^{-2t} v_2 + c_3 e^{t} v_3 \end{aligned}$$

- hvor c_1, c_2, c_3 er arbitrære konstanter og hvor vektorerne v_1, v_2, v_3 er fundet ovenfor.

- Antag nu, at begyndelsesværdier var givet til $x_1(0) = 7, x_2(0) = 9, x_3(0) = 13$. Så har vi med $c = [c_1\ c_2\ c_3]^T$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = x(0) = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = Vc$$

- Så c er løsning til $Vc = x_0$. Kan løses ved gausselimination eller ved $c = V^{-1} x_0$.

- Man finder $c = [12\ 22\ -3]^T$, så

$$x(t) = 12e^{-2t} v_1 + 22e^{-2t} v_2 - 3e^t v_3$$

1.7 Eksempel 2

Eksempel 2

- Betragt differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 13x_1(t) - 4x_2(t) + 4x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 40x_1(t) - 13x_2(t) + 10x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -40x_1(t) + 14x_2(t) - 5x_3(t) \end{aligned}$$

- Dette kan skrives $\dot{x} = Ax$, hvor $A = \begin{bmatrix} 13 & -4 & 4 \\ 40 & -13 & 10 \\ -40 & 14 & -5 \end{bmatrix}$.

- Egenværdierne for A findes til -3 og $-1 \pm 2i$. Matricen er diagonaliserbar (indenfor $\mathbb{C}$!).

- Basis for egenrummet hørende til -3 udgøres af $v_1 = [3\ 8\ -4]^T$.

- Basis for egenrummet hørende til $-1 + 2i$ udgøres af $v_2 = \begin{bmatrix} 4 + 2i & 10 + 5i & -5 \end{bmatrix}^T$.

- Basis for egenrummet hørende til $-1 - 2i$ udgøres af $v_3 = \overline{v_2} = \begin{bmatrix} 4 - 2i & 10 - 5i & -5 \end{bmatrix}^T$.

1.8 Eksempel 2 (fortsat I)

Eksempel 2 (fortsat I)

- Den fuldstændige *komplekse* løsning til systemet $\dot{x} = Ax$ er derfor

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 \\ &= c_1 e^{-3t} v_1 + c_2 e^{(-1+2i)t} v_2 + c_3 e^{(-1-2i)t} v_3 \end{aligned}$$

- hvor c_1, c_2, c_3 er arbitrære komplekse(!) konstanter.

- Da matricen A har reelle elementer vil systemet $\dot{x} = Ax$ også have reelle løsninger.
- Hvis $x(t)$ er en kompleks løsning, vil $\overline{x(t)}$ også være en løsning.
- Men så er $\operatorname{Re} x(t) = \frac{1}{2}\left(x(t) + \overline{x(t)}\right)$ og $\operatorname{Im} x(t) = \frac{1}{2i}\left(x(t) - \overline{x(t)}\right)$ begge reelle løsninger.
- Da $e^{(-1+2i)t}v_2$ er løsning er altså også $\operatorname{Re}\left(e^{(-1+2i)t}v_2\right)$ og $\operatorname{Im}\left(e^{(-1+2i)t}v_2\right)$ løsninger.

1.9 Eksempel 2 (fortsat II)

Eksempel 2 (fortsat II)

- Vi finder $e^{(-1+2i)t}v_2 = e^{-t}\begin{bmatrix} (4+2i)\,e^{2it} \\ (10+5i)\,e^{2it} \\ -5e^{2it} \end{bmatrix} = e^{-t}\begin{bmatrix} 4\cos 2t - 2\sin 2t + i\,(4\sin 2t + 2\cos 2t) \\ 10\cos 2t - 5\sin 2t + i\,(10\sin 2t + 5\cos 2t) \\ -5\cos 2t - 5i\sin 2t \end{bmatrix}$.
- Altså er to reelle løsninger $w_2(t)$ og $w_3(t)$ givet ved $w_2(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} 4\cos 2t - 2\sin 2t \\ 10\cos 2t - 5\sin 2t \\ -5\cos 2t \end{bmatrix}, w_3(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} 4\sin 2t + 2\cos 2t \\ 10\sin 2t + 5\cos 2t \\ -5\sin 2t \end{bmatrix}$.

1.10 Eksempel 2 (fortsat III)

Eksempel 2 (fortsat III)

- Da enhver *kompleks* løsning kan skrives som den *komplekse* linearkombination:
$$c_1e^{-3t}v_1 + c_2w_2(t) + c_3w_3(t)$$
- og da $e^{-3t}v_1, w_2(t), w_3(t)$ er reelle, vil den fuldstændige *reelle* løsning være den *reelle* linearkombination $x(t) = c_1e^{-3t}v_1 + c_2w_2(t) + c_3w_3(t) = c_1e^{-3t}\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix} + c_2e^{-t}\begin{bmatrix} 4\cos 2t - 2\sin 2t \\ 10\cos 2t - 5\sin 2t \\ -5\cos 2t \end{bmatrix} + c_3e^{-t}\begin{bmatrix} 4\sin 2t + 2\cos 2t \\ 10\sin 2t + 5\cos 2t \\ -5\sin 2t \end{bmatrix}$
- Vi har nemlig, at $x(0) = c_1v_1 + c_2w_2(0) + c_3w_3(0) = c_1v_1 + c_2 \operatorname{Re} v_2 + c_3 \operatorname{Im} v_2$, som ikke kan være reel uden at c_1, c_2, c_3 er reelle, idet $v_1, \operatorname{Re} v_2, \operatorname{Im} v_2$ er lineært uafhængige.

1.11 Bemærkning om lineær uafhængighed

Bemærkning om lineær uafhængighed

- Vi brugte, at $v_1, \operatorname{Re} v_2, \operatorname{Im} v_2$ er lineært uafhængige.
- Dette skyldes, at v_1, v_2 og v_3 er lineært uafhængige, og at $v_3 = \overline{v_2}$.

- Vi har nemlig $\operatorname{Re} v_2 = \frac{1}{2}\left(v_2 + \overline{v_2}\right) = \frac{1}{2}\left(v_2 + v_3\right)$ og $\operatorname{Im} v_2 = \frac{1}{2i}\left(v_2 - \overline{v_2}\right) = \frac{1}{2i}\left(v_2 - v_3\right)$.
- Så hvis $c_1 v_1 + c_2 \operatorname{Re} v_2 + c_3 \operatorname{Im} v_2 = 0$ har vi

$$c_1 v_1 + c_2 \frac{1}{2}\left(v_2 + v_3\right) + c_3 \frac{1}{2i}\left(v_2 - v_3\right) = 0$$

- Efter omordning altså

$$c_1 v_1 + \left(\frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2i}c_3\right) v_2 + \left(\frac{1}{2}c_2 - \frac{1}{2i}c_3\right) v_3 = 0$$

- v_1, v_2, v_3 er lineært uafhængige, så $c_1 = 0$, $\frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2i}c_3 = 0$ og $\frac{1}{2}c_2 - \frac{1}{2i}c_3 = 0$. Af disse følger $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.
- Altså kan $c_1 v_1 + c_2 \operatorname{Re} v_2 + c_3 \operatorname{Im} v_2 = 0$ kun opfyldes, når $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

1.12 Bemærkning om fuldstændig kompleks løsning

Bemærkning om fuldstændig kompleks løsning

- Enhver *kompleks* løsning $x(t)$ kan skrives som den *komplekse* linearkombination:

$$x(t) = c_1 e^{-3t} v_1 + c_2 w_2(t) + c_3 w_3(t)$$

  hvor med $z(t) = e^{(-1+2i)t} v_2$ vi har $w_2(t) = \operatorname{Re}(z(t))$ og $w_3(t) = \operatorname{Im}(z(t))$.
- Lad nemlig $x(t)$ være en kompleks løsning. Den kan skrives $x(t) = c_1 e^{-3t} v_1 + c_2 e^{(-1+2i)t} v_2 + c_3 e^{(-1-2i)t} v_3$, hvor vi kan vælge $v_3 = \overline{v_2}$.
- Så har vi $x(t) = c_1 e^{-3t} v_1 + c_2 z(t) + c_3 \overline{z(t)} = c_1 e^{-3t} v_1 + (c_2 + c_3) \operatorname{Re} z(t) + i(c_2 - c_3) \operatorname{Im} z(t) = c_1 e^{-3t} v_1 + (c_2 + c_3) w_2(t) + i(c_2 - c_3) w_3(t)$
- Ved at tillade komplekse værdier for de arbitrære konstanter i den fuldstændige reelle løsning opnås altså den fuldstændige komplekse løsning.