

DesignMat Uge 1

Introduktion til Maple, Nye elementære funktioner

Preben Alsholm

Forår 2009

1 Om kursets form og indhold

Om kursets form og indhold

- Kursets hjemmeside indeholder al information om kurset.
- Adressen er <http://www2.mat.dtu.dk/education/01007/>
- Præsentationer som denne vil blive lagt på hjemmesiden.
- Maple-worksheets er og vil blive anbragt på hjemmesiden.
- Meddelelser til alle udsendes over CampusNet.

2 Introduktion til Maple

Introduktion til Maple

- Introduktionen vil selvfølgelig foregå i Maple-programmet.
- Programmet hentes på <http://www.gbar.dtu.dk/software/>
- Efter installation indstil programmet til *Maple Notation* og *Worksheet Mode*.
- Maple vil blive brugt i alle 26 uger både under forelæsninger og øvelser.
- Maple bruges bl.a.:
- til kontrol af håndregninger
- til grafiske illustrationer
- til længere udregninger, der ellers ville være umulige eller for tidskrævende
- til eksperimenter

3 Hyperbolske funktioner

3.1 sinh og cosh

sinh og cosh

- Sinus hyperbolsk defineres således for alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$$

- Cosinus hyperbolsk defineres således for alle $x \in \mathbb{R}$

$$\cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

- Begge er definerede og differentiable overalt med

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x, \quad \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$$

- Hyperbolsk idiotformel: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Bevis:

$$\begin{aligned} (\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 &= \left(\frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \right)^2 - \left(\frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \frac{1}{4} (e^{2x} - 2 + e^{-2x}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

3.2 tanh, coth

tanh, coth

- Tangens hyperbolsk defineres således for alle $x \in \mathbb{R}$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

- Vi har åbenbart

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

- Derfor gælder $\tanh x \rightarrow 1$ for $x \rightarrow \infty$ og $\tanh x \rightarrow -1$ for $x \rightarrow -\infty$.
- Cotangens hyperbolsk defineres således for $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

- For graferne se Maple.

4 Omvendt funktion

4.1 Omvendt funktion generelt

Omvendt funktion generelt

- Funktionen f kaldes enentydig (1-1), hvis for alle x_1, x_2 :

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

- Lad f være enentydig. Den omvendte funktion f^{-1} til f er givet ved

$$f^{-1}(a) = b \iff f(b) = a$$

dvs. f^{-1} omgør, hvad f gør.

- Lad f være enentydig. Vi har for alle x : $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ og $(f \circ f^{-1})(x) = x$.
- Hvis f er differentiabel i x_0 med $f'(x_0) \neq 0$, så er f^{-1} differentiabel i $y_0 = f(x_0)$ med

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

- Maple: arcsin, arccos og arctan, men se også nedenfor.

4.2 arcsin I

arcsin I

- Betragt restriktionen af sinusfunktionen til $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Lad os kalde den Sin. Vi har altså

$$\text{Sin}(x) = \begin{cases} \sin x & \text{for } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \text{ikke defineret} & \text{for } x \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

- Sin er voksende, og derfor enentydig. Den omvendte funktion kaldes arcussinus og betegnes med arcsin.
- arcsin omgør, hvad Sin gør:

$$\begin{aligned} \arcsin(a) = b &\iff \text{Sin}(b) = a \\ &\iff \sin(b) = a \wedge b \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{aligned}$$

- Definitionsmængden for arcsin er værdimængden for Sin, altså $[-1, 1]$.
- $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ da $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ og $\frac{\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- $\arcsin 0 = 0$ da $\sin(0) = 0$ og $0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ da $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ og $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- $\arcsin(\sin(\frac{3\pi}{2})) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$

4.3 arcsin II

arcsin II

- $\sin(\arcsin x) = x$ for alle $x \in [-1, 1]$.
- $\arcsin(\sin x) = x$ for alle $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- arcsin er differentiabel i ethvert $x \in]-1, 1[$ med

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Bevis. Lad $x_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ og lad $f = \sin$ i den generelle sætning om differentiability. $f'(x_0) = \cos x_0 \neq 0$. Sæt $y_0 = f(x_0) = \sin x_0$, så gælder

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(y_0) &= \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\cos x_0} = \\ \frac{1}{\pm \sqrt{1 - (\sin x_0)^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin x_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}} \end{aligned}$$

4.4 arccos I

arccos I

- Betragt restriktionen af cosinusfunktionen til $[0, \pi]$. Lad os kalde den Cos. Vi har altså

$$\text{Cos}(x) = \begin{cases} \cos x & \text{for } x \in [0, \pi] \\ \text{ikke defineret} & \text{for } x \notin [0, \pi] \end{cases}$$

- Cos er aftagende, og derfor enetydig. Den omvendte funktion kaldes arcuscosinus og betegnes med arccos.
- arccos omgør, hvad Cos gør:

$$\begin{aligned} \arccos(a) = b &\iff \text{Cos}(b) = a \\ &\iff \cos(b) = a \wedge b \in [0, \pi] \end{aligned}$$

- Definitionsmængden for arccos er værdimængden for Cos, altså $[-1, 1]$.
- $\arccos 1 = 0$ da $\cos 0 = 1$ og $0 \in [0, \pi]$.
- $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ da $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ og $\frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$.
- $\arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$ da $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ og $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$.
- $\arccos(\cos(\frac{3\pi}{2})) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$

4.5 arccos II

arccos II

- $\cos(\arccos x) = x$ for alle $x \in [-1, 1]$.
- $\arccos(\cos x) = x$ for alle $x \in [0, \pi]$.
- arccos er differentiabel i ethvert $x \in]-1, 1[$ med

$$\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Bevis. Lad $x_0 \in]0, \pi[$ og lad $f = \cos$ i den generelle sætning om differentiability. $f'(x_0) = -\sin x_0 \neq 0$. Sæt $y_0 = f(x_0) = \cos x_0$, så gælder

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(y_0) &= \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{-\sin x_0} = \\ \frac{1}{\pm\sqrt{1-(\cos x_0)^2}} &= -\frac{1}{\sqrt{1-(\sin x_0)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}} \end{aligned}$$

4.6 arctan I

arctan I

- Betragt restriktionen af tangensfunktionen til $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Lad os kalde den Tan. Vi har altså

$$\text{Tan}(x) = \begin{cases} \tan x & \text{for } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ \text{ikke defineret} & \text{for } x \notin]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

- Tan er voksende, og derfor enetydig. Den omvendte funktion kaldes arcustangens og betegnes med arctan.
- arctan omgør, hvad Tan gør:

$$\begin{aligned} \arctan(a) = b &\iff \text{Tan}(b) = a \\ &\iff \tan(b) = a \wedge b \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{aligned}$$

- Definitionsmængden for arctan er værdimængden for Tan, altså \mathbb{R} .
- $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ da $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ og $\frac{\pi}{4} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
- $\arctan 0 = 0$ da $\tan 0 = 0$ og $0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
- $\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ da $\tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ og $\frac{\pi}{3} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
- $\arctan(\tan(\frac{3\pi}{4})) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

4.7 arctan II

arctan II

- $\tan(\arctan x) = x$ for alle $x \in \mathbb{R}$.
- $\arctan(\tan x) = x$ for alle $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
- arctan er differentiabel i ethvert $x \in \mathbb{R}$ med

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

- Bevis. Lad $x_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ og lad $f = \tan$ i den generelle sætning om differentiability. $f'(x_0) = 1 + \tan^2 x_0 \neq 0$. Sæt $y_0 = f(x_0) = \tan x_0$, så gælder

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{1 + \tan^2 x_0} = \frac{1}{1 + y_0^2}$$

- Maple.