DesignMat Uge 2
Taylorpolynomier og Taylors formel

Preben Alsholm

Forår 2009

1 Taylorpolynomier

1.1 Definition af Taylorpolynomium

Definition af Taylorpolynomium

- Givet en funktion $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og et udviklingspunkt $x_0 \in I$. Find et polynomium P_n af grad højst n, så f og P_n har samme nulte, første, anden, tredie, ..., n'te afledede i punktet x_0.
- P_n skal så opfylde ligningerne

$$\begin{aligned} P_n(x_0) &= f(x_0) \\ P_n'(x_0) &= f'(x_0) \\ P_n''(x_0) &= f''(x_0) \\ &\vdots \\ P_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

- Skriver vi P_n på formen

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 \\ &\quad + a_4(x - x_0)^4 + \ldots + a_n(x - x_0)^n \end{aligned}$$

  søger vi nu $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

1.2 Udledning af formlen for Taylorpolynomiet

Udledning af formlen for Taylorpolynomiet

- Vi ser med det samme, at $a_0 = f(x_0)$. Da

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 \\ &\quad + 4a_4(x - x_0)^3 + \ldots + na_n(x - x_0)^{n-1} \end{aligned}$$

- fås, at $a_1 = f'(x_0)$. Da
$$\begin{aligned} P_n''(x) &= 2a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3 (x-x_0) + 4\cdot 3\cdot a_4 (x-x_0)^2 \\ &\quad + \ldots + n(n-1) a_n (x-x_0)^{n-2} \end{aligned}$$
- fås $a_2 = \frac{1}{2} f''(x_0)$. Da
$$\begin{aligned} P_n'''(x) &= 3\cdot 2\cdot a_3 + 4\cdot 3\cdot 2\cdot a_4 (x-x_0) \\ &\quad + \ldots + n(n-1)(n-2) a_n (x-x_0)^{n-3} \end{aligned}$$
fås, at $a_3 = \frac{1}{2\cdot 3} f'''(x_0)$.

1.3 Formlen for Taylorpolynomiet

Formlen for Taylorpolynomiet

- Generelt fås altså
$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$$
således at
$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \end{aligned}$$
- Dette kan også skrives
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$
idet vi definerer $0! = 1$ og $f^{(0)} = f$.

1.4 Eksempel: Eksponenentialfunktionen

Eksempel: Exponentialfunktionen

- $f(x) = e^x$ med udviklingspunkt 0, orden n. Vi har jo $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x$.
- Så $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ for alle $k \geq 0$.
- Hermed fås
$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 \\ &\quad + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n \end{aligned}$$
- Altså
$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$$
- Dette kan også skrives
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$$

1.5 Funktion givet ved simpel forskrift

Funktion givet ved simpel forskrift

- $f(x) = x \arctan x$ med udviklingspunkt 1, orden 2.
- Vi har

$$\begin{aligned} f'(x) &= \arctan x + \frac{x}{1+x^2} \\ f''(x) &= \frac{2}{1+x^2} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

- Så $f(1) = \frac{\pi}{4}, f'(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}, f''(1) = \frac{1}{2}$.
- Hermed fås

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2} f''(1)(x-1)^2 \\ &= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)(x-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(x-1)^2 \\ &= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 \end{aligned}$$

- Maple

1.6 Funktion givet ved differentialligning

Funktion givet ved differentialligning

- Find det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt $\frac{\pi}{2}$ for løsningen til differentialligningen

$$x'(t) = \sin\left(t + x(t)^2\right) \text{ med } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

- Vi skal finde $P_2(t) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) + x'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} x''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$
- Ved indsættelse af $t = \frac{\pi}{2}$ i differentialligningen fås $x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
- Ved differentiation af differentialligningen fås $x''(t) = \cos\left(t + x(t)^2\right) \cdot (1 + 2x(t)\, x'(t))$.
- Ved indsættelse af $t = \frac{\pi}{2}$ heri fås $x''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) \cdot \left(1 + 2x\left(\frac{\pi}{2}\right) x'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$.
- Altså fås $P_2(t) = 0 + \left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 = t - \frac{\pi}{2}$
- som jo er det samme som det første Taylorpolynomium $P_1(t)$. Se Maple for $P_3(t)$.

2 Taylors formel

2.1 Lineariseringen

Lineariseringen

- Definitionen på differentiabilitet kan også formuleres således:
- f er *differentiabel* i x_0 med differentialkvotient a, hvis der findes en funktion ε defineret i et interval omkring 0, så

  $$f(x_0+h)-f(x_0)=ah+\varepsilon(h)\,h$$

  og hvor $\varepsilon(h)\to 0$ for $h\to 0$.
- At f er differentiabel i x_0 betyder altså, at $f(x)$ approksimeres godt ved $f(x_0)+a(x-x_0)$, når $|x-x_0|$ er lille.
- Funktionen $P_1(x)=f(x_0)+a(x-x_0)$ kaldes for *lineariseringen* af f i x_0.
- Lineariseringen P_1 er det første Taylorpolynomium for f med udviklingspunkt x_0.
- Grafen for P_1 er tangenten til grafen for f i $(x_0, f(x_0))$.
- Hvor meget smider vi væk, når vi erstatter $f(x)$ med $P_1(x)$?

2.2 Taylors formel med Lagrange's restled

Taylors formel med Lagrange's restled

- Hvad er den fejl man begår ved at erstatte en funktion f med dens Taylorpolynomium P_n?
- Taylors formel: Lad f være $n+1$ gange differentiabel i intervallet I og lad $x_0\in I$. For givet $x\in I$ findes et tal ξ mellem x_0 og x, så

  $$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+ \\ &\quad \ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \\ &\quad +\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

- Altså $f(x)=P_n(x)+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}=P_n(x)+R_n(x)$.
- Vi beviser ikke sætningen.

2.3 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

- Eksempel. $f(x) = e^x$, udviklingspunkt 0. Vi har $P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$.
- $f^{(n+1)}(x) = e^x$. Så

$$|e^x - P_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi} x^{n+1} \right| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

- Bestem n, så $|e^x - P_n(x)| \leq 10^{-5}$ for alle $x \in [-0.1, 0.1]$.
- I Taylors formel gælder så $|\xi| \leq 0.1$ og dermed

$$\begin{aligned} |e^x - P_n(x)| &= \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{e^{0.1}}{(n+1)!} (0.1)^{n+1} \\ &\leq \frac{2}{(n+1)!} (0.1)^{n+1} \end{aligned}$$

- Vi vælger nu n, så $\frac{2}{(n+1)!}(0.1)^{n+1} \leq 10^{-5}$. $n = 3$ er nok, idet $\frac{2}{4!}10^{-4} = \frac{1}{12}10^{-4} < 10^{-5}$.

2.4 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

- Lad $f(x)$ for alle x være givet ved

$$f(x) = \int_0^x (1+t)\cos\left(t^3\right) dt$$

- Vurdér den fejl, der begås ved at erstatte $f(x)$ med dets 2. Taylorpolynomium $P_2(x)$ med udviklingspunkt 0, når $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
- Vi finder

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1+x)\cos\left(x^3\right) \\ f''(x) &= \cos\left(x^3\right) - (1+x)\,3x^2 \sin\left(x^3\right) \\ f'''(x) &= -6x(1+2x)\sin\left(x^3\right) - 9x^4(1+x)\cos\left(x^3\right) \end{aligned}$$

- Heraf findes $P_2(x) = x + \frac{1}{2}x^2$.
- Vha. Maple findes, at $|f'''(x)| \leq 1.59$ for $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Altså fås

$$|f(x) - P_2(x)| \leq 1.59 \cdot \frac{1}{6}|x|^3 \leq 1.59 \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \simeq 0.03\,3$$

  Den faktiske maksimale fejl kan findes grafisk til 0.0008.

2.5 Taylors grænseformel

Taylors grænseformel

- Lad $f \in C^n(I)$ og lad $x_0 \in I$. Der findes da en funktion ε defineret i et interval omkring 0 så for $x \in I$ gælder

$$f(x) = P_n(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0)$$

  hvor $\varepsilon(h) \to 0$ for $h \to 0$.

- Bevis. Taylors formel giver et ξ mellem x og x_0 så $f(x) = P_{n-1}(x) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x - x_0)^n$.

- Heraf fås $f(x) = P_n(x) + \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0)\right)(x - x_0)^n$.

- Men $f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0) \to 0$ for $x \to x_0$, da $f^{(n)}$ er kontinuert pr. antagelse.

2.6 Eksempel

Eksempel

- Vi ønsker at bestemme grænseværdien

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{e^{2x} - 1 - 2x}$$

- Vi udnytter, at

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \varepsilon_1(x)x^2 \\
e^{2x} &= 1 + 2x + \frac{1}{2}(2x)^2 + \varepsilon_2(x)x^2
\end{aligned}$$

- Så for $x \to 0$ fås

$$\frac{\ln(1+x) - x}{e^{2x} - 1 - 2x} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + \varepsilon_1(x)x^2}{2x^2 + \varepsilon_2(x)x^2} = \frac{-\frac{1}{2} + \varepsilon_1(x)}{2 + \varepsilon_2(x)} \to -\frac{1}{4}$$

2.7 Store O-notationen

Store O-notationen

- Når Maplekommandoen `taylor(sin(x),x=0,4);` som resultat giver $x - \frac{1}{6}x^3 + O\left(x^4\right)$, betyder der følgende:

- Der findes en konstant K, så

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)\right| \le Kx^4$$

  for alle x i et interval med 0 som indre punkt.

- Generelt betyder $f(x) = O(u(x))$ for $x \to a$, at der findes en konstant K, så
$$|f(x)| \leq K|u(x)|$$
for alle x i et interval med a som indre punkt.

- Vi har eksempelvis: $\sin x = O(x)$, $\sin x = x + O(x^2)$, men også $\sin x = x + O(x^3)$ og den allerede viste.

- I Taylor-sammenhæng kan $O((x - x_0)^n)$ tolkes som led af orden n og højere.

2.8 Lille o-notationen

Lille o-notationen

- Udsagnet $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ betyder det samme som $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \varepsilon(x)x^3$.

- Med andre ord: $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ betyder, at
$$\frac{\sin x - \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)}{x^3} \to 0$$
for $x \to 0$.

- Generelt betyder $f(x) = o(u(x))$ for $x \to a$, at
$$\frac{f(x)}{u(x)} \to 0$$
for $x \to a$.

- Hvis $f(x) = O(x^4)$ for $x \to 0$ så gælder også $f(x) = o(x^3)$.

- Den omvendte gælder ikke.