

DesignMat

Lineære ligningssystemer og matricer

Preben Alsholm

Uge 4 Forår 2009

1 Matrixalgebra

1.1 Addition og multiplikation med skalar

Addition og multiplikation med skalar

- Addition af matricer. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

- Multiplikation med skalar. Med A som før:

$$sA = \begin{bmatrix} sa_{11} & sa_{12} & sa_{13} \\ sa_{21} & sa_{22} & sa_{23} \end{bmatrix}$$

- Den kommutative regel for addition: $A + B = B + A$
- Den associative regel for addition: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Regler for multiplikation med skalar: $r(A + B) = rA + rB$, $(r + s)A = rA + sA$, $(rs)A = r(sA)$
- Maple.

1.2 Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation I

- Lad A være en $m \times n$ -matrix og lad $x \in \mathbb{R}^n$. Skriv $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$, hvor nu $a_i \in \mathbb{R}^m$. Så definerer vi produktet Ax ved

$$Ax = x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n$$

- Ligningssystemet med koefficientmatricen A og højresiden b kan nu skrives

$$Ax = b$$

- Alternativ udregning af Ax : Skalarprodukterne af rækkerne i A med søjlen x .
- Multiplikation af matricer: A er $m \times n$ og B er $n \times p$.

$$AB = A [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p] = [Ab_1 \ Ab_2 \ \dots \ Ab_p]$$

- Ækvivalent definition (der bruges i JE):

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

- Maple-illustration.

1.3 Matrixmultiplikation II

Matrixmultiplikation II

- Den associative regel for multiplikation: $(AB)C = A(BC)$
- De distributive regler: $A(B+C) = AB+AC$, $(B+C)A = BA+CA$
- Regning med skalar: $r(AB) = (rA)B = A(rB)$
- AB og BA . Hvornår eksisterer begge?
- Hvornår giver spørgsmålet $AB = BA$ mening?
- Er det i så fald tilfældet?
- Matricer kommuterer ikke generelt! Man skal altså regne med, at $AB \neq BA$. Se Maple for eksempler.

1.4 Enhedsmatricen

Enhedsmatricen

- Enhedsmatricen af størrelse $n \times n$ betegnes med I_n :

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- Hvis A er $m \times n$, så gælder $I_m A = A I_n = A$.
- Maple.

1.5 Transponering

Transponering

- Den transponerede af matricen $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ er matricen

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$ Bemærk rækkefølgen!
- $(rA)^T = rA^T$

1.6 Ækvivalens af matricer og rang

Ækvivalens af matricer og rang

- *Definition.* Matricerne A og B siges at være ækvivalente ($A \sim B$), hvis den ene ved rækkeoperationer kan omdannes til den anden.
- Hvis $A \sim B$ så gælder åbenbart, at $\rho(A) = \rho(B)$.
- Det omvendte er galt: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ har samme rang, men de er ikke ækvivalente!
- Det kan vises, at $\rho(A^T) = \rho(A)$. (Det er ikke trivielt).
- Note: Kan vises ved at vise, at $N(A^T)^\perp = R(A)$. Dette betyder, at søjlerummet er mængden af de vektorer, der står vinkelret på nulrummet for A^T .

1.7 Matrixligninger

Matrixligninger

- Lad A være en $m \times n$ matrix og B en $m \times p$ matrix. Vi vil løse ligningen $AX = B$.
- Her bliver den ubekendte matrix X nødvendigvis en $n \times p$ matrix.
- Skriv $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p]$ og $B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p]$
- Så har vi $[Ax_1 \ Ax_2 \ \dots \ Ax_n] = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p]$.

- Vi skal altså løse systemerne $Ax_1 = b_1, Ax_2 = b_2, \dots, Ax_p = b_p$.
- De p systemer har samme koefficientmatrix, men p forskellige højresider, der stillet sammen udgør B .
- Totalmatricen indeholdende alle højresiderne er dermed $T = [A \mid B]$.
- $AX = B$ har ingen løsning, når $\rho(T) > \rho(A)$.
- $AX = B$ har netop én løsning, når $\rho(T) = \rho(A) = n$.
- $AX = B$ har uendeligt mange løsninger, når $\rho(T) = \rho(A) = \rho < n$. I alt er der $(n - \rho)$ frie parametre.
- Maple.