DesignMat
Determinant og Egenværdiproblemet for Matricer

Preben Alsholm

Forår 2009

1 Determinanter

1.1 Komplement til matrix I

Komplement til matrix I

- Lad $n \times n$-matricen A være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Undermatricen A_{ij} er den $(n-1) \times (n-1)$-matrix, man får ved at fjerne række i og søjle j fra A.
- Determinanten af A kan udregnes således (*udvikling i komplementer langs første række)*:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} - \\ &\quad \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} K_{1j} \end{aligned}$$

- hvor (i, j)-komplementet til A er defineret ved $K_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

1.2 Komplement til matrix II

Komplement til matrix II

- Mere generelt gælder: $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} K_{ij}$ for ethvert i og $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} K_{ij}$ for ethvert j.

- Udvikling langs første række: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} +$ $(-5)\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - 3\cdot 0 + (-5)\cdot(-6) = 34.$

- Udvikling i komplementer langs 3. række: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} -$ $(-1)\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = 0 + 34 + 0 = 34.$

2 Egenværdier og Egenvektorer

2.1 Definition og Eksempel 1

Definition og Eksempel 1

- Lad A være en kvadratisk matrix. Tallet λ kaldes en *egenværdi* for A, hvis der findes en vektor $v \neq 0$, så

$$Av = \lambda v \tag{1}$$

- En vektor v, der opfylder (1), kaldes en *egenvektor* hørende til egenværdien λ.

- Eksempel 1. Lad $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -3 \\ 0 & 36 & 10 \end{bmatrix}$ og lad $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

- Da gælder, at $Av_1 = 3v_1$, $Av_2 = -2v_2$ og $Av_3 = v_3$.

- Dette betyder, at tallene $3, -2$ og 1 er egenværdier for A med tilhørende egenvektorer v_1, v_2 og v_3 (henholdsvis).

2.2 Eksempel 2

Eksempel 2

- Lad A være matricen $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -8 \\ 3 & 2 & -3 \\ \frac{3}{2} & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

- Vi vil finde egenværdier og tilhørende egenvektorer for A.

- Vi skal finde tal λ for hvilke der findes $x \neq 0$ så $Ax = \lambda x$.

- Altså $(A - \lambda I)\,x = 0$ skal have en ikke-triviel løsning x.

- Dette er tilfældet, hvis og kun hvis $A - \lambda I$ ikke er invertibel.

- Vi ved, at $A - \lambda I$ er invertibel hvis og kun hvis $\det(A - \lambda I) \neq 0$.
- Egenværdierne for A er altså rødderne i *karakterpolynomiet* $\det(A - \lambda I)$.

2.3 Eksempel 2 fortsat

Eksempel 2 fortsat

- Karakterpolynomiet er $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -8 \\ 3 & 2-\lambda & -3 \\ \frac{3}{2} & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix}$ der udregnes til
- $(2-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & -8 \\ \frac{3}{2} & -3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda - 3\right)$.
- Rødder: $2, 3$ og -1. Disse er altså egenværdierne.
- Egenvektorer hørende til egenværdien 3 opfylder $(A - 3I)\, x = 0$.
- Homogent ligningssystem. Gausselimination:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -8 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Dvs. $x_1 - 4x_3 = 0$ og $-x_2 + 9x_3 = 0$, så $x = x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2.4 Eksempel 3

Eksempel 3

- Lad $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$.
- Vi har $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & -3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & 3 \\ -9 & -9 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$.
- Så egenværdierne er 1 og -2, den sidste med algebraisk multiplicitet 2.
- Egenværdierne for A^T er fuldstændig de samme, da $A^T - \lambda I = (A - \lambda I)^T$ således at $\det\left(A^T - \lambda I\right) = \det(A - \lambda I)$.

2.5 Eksempel 4

Eksempel 4

- Lad $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
- Evt. egenværdier for A er rødder i karakterpolynomiet.
- $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$.
- $\lambda^2 + 1$ har ingen reelle rødder (men de to imaginære $\pm i$).
- Det betyder, at hvis vi kun accepterer reelle tal, så har A ingen egenværdier.
- Men accepteres komplekse tal, så har A egenværdierne $\pm i$.

2.6 Definition af diagonaliserbar matrix

Definition af diagonaliserbar matrix

- A er diagonaliserbar, hvis der findes en invertibel matrix V, så $\Lambda = V^{-1}AV$ er en diagonalmatrix.
- Hvis $\Lambda = V^{-1}AV$, så gælder $A = V\Lambda V^{-1}$ og omvendt.
- Hvis $A = V\Lambda V^{-1}$, så fås $A^k = V\Lambda^k V^{-1}$, da eksempelvis

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(V\Lambda V^{-1}\right)^2 = \left(V\Lambda V^{-1}\right)\left(V\Lambda V^{-1}\right) = V\Lambda\left(V^{-1}V\right)\Lambda V^{-1} \\ &= V\Lambda I\Lambda V^{-1} = V\Lambda\Lambda V^{-1} = V\Lambda^2 V^{-1} \end{aligned}$$

- Da Λ^k er let at beregne, er det dermed let at finde A^k, når vel at mærke A er diagonaliserbar.

2.7 Hovedsætning om diagonaliserbarhed

Hovedsætning om diagonaliserbarhed

- En $n \times n$-matrix A er diagonaliserbar, hvis og kun hvis der findes en invertibel matrix V, hvis søjler er egenvektorer $v_1, v_2, \ldots, v_n$ for A.
- I så fald er $V^{-1}AV$ diagonalmatricen med egenværdierne $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ for A i diagonalen.
- Bevis. $V^{-1}AV = \Lambda$ er ækvivalent med $AV = V\Lambda$, hvis V er invertibel.
- Lad $v_1, v_2, \ldots, v_n$ være vilkårlige vektorer og $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ vilkårlige tal. Lad $V = [v_1\ v_2\ \ldots\ v_n]$ og $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.
- Med $I = [e_1 \quad e_2 \quad \ldots \quad e_n]$ er $\Lambda = [\lambda_1 e_1 \quad \lambda_2 e_2 \quad \ldots \quad \lambda_n e_n]$ og $Ve_k = v_k$.
- Så $V\Lambda = [\lambda_1 Ve_1 \quad \lambda_2 Ve_2 \quad \ldots \quad \lambda_n Ve_n] = [\lambda_1 v_1 \quad \lambda_2 v_2 \quad \ldots \quad \lambda_n v_n]$.
- Men $AV = [Av_1 \quad Av_2 \quad \ldots \quad Av_n]$.
- Dvs. $AV = V\Lambda$ hvis og kun hvis $Av_i = \lambda_i v_i$ for alle i.

2.8 Karakterpolynomiet

Karakterpolynomiet

- Lad A være en $n \times n$-matrix med karakterpolynomium $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
- Lad rødderne være $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (gentaget efter multiplicitet).
- $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \det(\lambda I - A) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$.
- Ved indsættelse af $\lambda = 0$ fås $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.
- Koefficienten til λ^{n-1} er $(-1)^{n+1} (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$.
- Men med $A = [a_{ij}]$, er den også $(-1)^{n+1} (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$.
- Summen af diagonalelementerne i A er *sporet* af A, $\text{spor}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.
- Altså

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n &= spor(A) \\
\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n &= \det A
\end{aligned}
$$

2.9 Algebraisk og geometrisk multiplicitet

Algebraisk og geometrisk multiplicitet

- Lad A være en $n \times n$-matrix.
- Karakterpolynomiet $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ har n rødder regnet med multiplicitet.
- Hvis roden λ_1 har multiplicitet k i $p(\lambda)$, så har egenværdien λ_1 *algebraisk multiplicitet* k, (betegnelse $\text{am}(\lambda_1)$).
- Hvis matricen $A - \lambda_1 I$ har rang $n - j$, så har λ_1 *geometrisk multiplicitet* j, (betegnelse $\text{gm}(\lambda_1)$).
- Den geometriske multiplicitet er lig med antallet af frie parametre i løsningerne til $(A - \lambda_1 I)x = 0$.
- Der gælder: $1 \leq gm(\lambda) \leq am(\lambda)$ for enhver egenværdi λ.
- Bevis: Se side 204.