DesignMat
Komplekse tal

Preben Alsholm

Uge 7 Forår 2009

1 Talmængder

1.1 Talmængder

Talmængder

- $\mathbb{N}$ er mængden af *naturlige tal*, $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
- $\mathbb{Z}$ er mængden af *hele tal* $\ldots - 5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$.
- $\mathbb{Q}$ er mængden af *rationale tal*, dvs. brøker og hele tal.
- $\mathbb{R}$ er mængden af *reelle tal*. Identificeres med mængden af punkter på en tallinie. De reelle tal, der ikke er rationale, kaldes *irrationale*.
- $\mathbb{C}$ er mængden af *komplekse tal*. Identificeres med mængden af punkter i planen. De komplekse tal, der ikke er reelle, kaldes *imaginære*.
- Vi har $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

1.2 Ligninger

Ligninger

- Ligningen $x + 2 = 1$ har ingen løsning indenfor $\mathbb{N}$.
- men har indenfor $\mathbb{Z}$.
- Ligningen $2x + 1 = 0$ har ingen løsning indenfor $\mathbb{Z}$.
- men har indenfor $\mathbb{Q}$.
- Ligningen $x^2 - 2 = 0$ har ingen løsning indenfor $\mathbb{Q}$.
- men har indenfor $\mathbb{R}$.
- Ligningen $x^2 + 1 = 0$ har ingen løsning indenfor $\mathbb{R}$.
- men har indenfor $\mathbb{C}$.

2 Indførelse af de komplekse tal I

Indførelse af de komplekse tal I

- $\mathbb{C}$ er som mængde betragtet lig med punkterne i planen. Planen identificeres med $\mathbb{R}^2$, så $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.
- Vi skal definere både addition og multiplikation i $\mathbb{C}$.
- De regneregler, vi kender fra $\mathbb{R}$, ønsker vi også skal gælde i $\mathbb{C}$.
- Vi skal sørge for, at $\mathbb{C}$ kan betragtes som en udvidelse af $\mathbb{R}$.
- Altså $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Vi skal se, at $\mathbb{R}$ kan opfattes som punkterne på førsteaksen, *den reelle akse*.
- Vi ønsker at blive i stand til at løse bl.a. ligningen $x^2 + 1 = 0$ indenfor $\mathbb{C}$.

2.1 Regneregler for de reelle tal

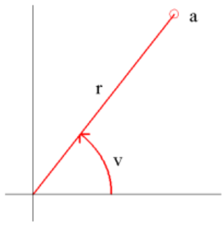
Regneregler for de reelle tal

1. $a + b = b + a$ (den kommutative lov for addition)
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (den associative lov for addition)
3. $ab = ba$ (den kommutative lov for multiplikation)
4. $(ab)\,c = a\,(bc)$ (den associative lov for multiplikation)
5. $a\,(b + c) = ab + ac$ (den distributive lov)
6. $a + 0 = a$
7. $1a = a$
8. $a + x = 0$ har præcis én løsning for x
9. $ax = 1$ har præcis én løsning for x, når $a \neq 0$

2.2 Polære koordinater i den komplekse plan

Polære koordinater i den komplekse plan

- Lad $a = (a_1, a_2)$. *Modulus*: $r = |a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. (absolutværdi, numerisk værdi).
- *Argument*: Vinklen fra den reelle akses positive del til linien fra $(0, 0)$ til a. Betegnelse: $v = \arg(a)$. Regnes med fortegn.
- Ethvert punkt i planen kan skrives på polær form: $a = r_v = (r\cos v, r\sin v)$, hvor r er modulus og v er et argument for a.
- *Hovedargumentet* for a er det argument, der ligger i $]-\pi, \pi]$. Betegnes $\mathrm{Arg}(a)$.



2.3 Overgangsformler

Overgangsformler

- Med $a = (a_1, a_2) = r_v$ har vi

$$a_1 = r\cos v \text{ og } a_2 = r\sin v$$

- Omvendt har vi

$$r = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

- desuden

$$\cos v = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \quad \sin v = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \quad \tan v = \frac{a_2}{a_1}$$

  I den sidste forudsættes $a_1 \neq 0$.

- $v = \begin{cases} \arctan \frac{a_2}{a_1} & \text{for} \quad a_1 > 0 \\ \arctan \frac{a_2}{a_1} \pm \pi & \text{for} \quad a_1 < 0 \end{cases}$ for $a_1 \neq 0$.

3 Indførelse af de komplekse tal II

Addition og multiplikation

- Med $a = (a_1, a_2) = r_v$ og $b = (b_1, b_2) = \rho_\theta$ definerer vi
- Summen $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, (altså stedvektoraddition)
- Produktet $ab = (r\rho)_{v+\theta}$. (Dette er den vigtige del!)
- Sætning: $ab = (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$.
- Bevis: Bruger additionsformlerne

$$\begin{aligned} \cos(v+\theta) &= \cos v \cos\theta - \sin v \sin\theta \\ \sin(v+\theta) &= \sin v \cos\theta + \cos v \sin\theta \end{aligned}$$

- $ab = (r\rho)_{v+\theta} = (r\rho\cos(v+\theta), r\rho\sin(v+\theta)) = (r\rho(\cos v\cos\theta - \sin v\sin\theta), r\rho(\cos v\sin\theta + \sin v\cos$
  $(a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$.

3.1 Regneregler

Regneregler

- Der gælder nu følgende regneregler:
- $a + b = b + a$ (den kommutative lov for addition)
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ (den associative lov for addition)
- $ab = ba$ (den kommutative lov for multiplikation)
- $(ab)\,c = a\,(bc)$ (den associative lov for multiplikation)
- $a\,(b + c) = ab + ac$ (den distributive lov)
- $a + z = b$ har præcis én løsning for z
- $az = b$ har præcis én løsning for z, når $a \neq 0$.

3.2 De reelle tal og den imaginære enhed

De reelle tal og den imaginære enhed

- Bemærk, at $(a_1, 0) + (b_1, 0) = (a_1 + b_1, 0)$ og $(a_1, 0) \cdot (b_1, 0) = (a_1 b_1, 0)$.
- $\mathcal{R} = \{(x, 0)\,|x \in \mathbb{R}\}$. De komplekse tal i $\mathcal{R}$ opfører sig i enhver henseende som reelle tal ifølge ovenstående.
- ... men så er det de reelle tal, og vi vil skrive x i stedet for $(x, 0)$.
- Sæt $i = (0, 1) = 1_{\frac{\pi}{2}}$. Så gælder $i^2 = i \cdot i = 1_{\frac{\pi}{2}} \cdot 1_{\frac{\pi}{2}} = 1_\pi = (-1, 0) = -1$.
- Vi har nu $a = (a_1, a_2) = (a_1, 0) + (0, a_2) = (a_1, 0) + (0, 1)\,(a_2, 0) = a_1 + ia_2$
- Realdel: $\operatorname{Re} a = a_1$. Imaginærdel: $\operatorname{Im} a = a_2$.

3.3 Kompleks konjugation

Kompleks konjugation

- Kompleks konjugation: $\overline{a} = \overline{a_1 + ia_2} = a_1 - ia_2$.
- $\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b}$ og $\overline{(ab)} = \overline{a}\overline{b}$.
- $|ab| = |a|\,|b|$.
- $|a^n| = |a|^n$.
- $\arg\,(ab) = \arg a + \arg b$.
- $\arg\,(a^n) = n \arg a$.
- $\arg\left(\frac{a}{b}\right) = \arg a - \arg b$.
- De 3 sidste skal forstås ret!

3.4 Division?

Division?

- Med a^{-1} menes løsningen til ligningen $az = 1$.
- a^{-1} skrives også $\frac{1}{a}$.
- Med $\frac{b}{a}$ menes ba^{-1}. Dette tal er løsningen til ligningen $az = b$.
- En metode til konkret udregning:

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{-4+7i} &= \frac{(2+3i)(-4-7i)}{(-4+7i)(-4-7i)} = \frac{(2+3i)(-4-7i)}{(-4)^2-(7i)^2} \\ &= \frac{(2+3i)(-4-7i)}{16+49} = \frac{13-26i}{65} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\end{aligned}$$