

DesignMat

Den komplekse eksponentialfunktion og polynomier

Preben Alsholm

Uge 8 Forår 2009

1 Den komplekse eksponentialfunktion

1.1 Definitionen

Definitionen

- Den velkendte eksponentialfunktion

$$x \rightarrow e^x$$

vil vi ofte ligesom i Maple give navnet \exp . Vi har altså

$$\exp(x) = e^x$$

for alle $x \in \mathbb{R}$.

- Denne funktion har den fundamentale egenskab

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$$

eller anderledes skrevet $e^{x+y} = e^x e^y$ for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

- Vi *definerer* nu

$$\exp(x + iy) = \exp x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

eller anderledes skrevet

$$e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

gældende for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

1.2 Egenskaber for \exp

Egenskaber for \exp

- Når $x, y \in \mathbb{R}$ har e^{x+iy} modulus e^x og argument y :

$$\left| e^{x+iy} \right| = e^x \quad \arg(e^{x+iy}) = y$$

- For alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gælder

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2 \text{ altså } e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

- Bevis: Sæt $z_1 = x_1 + iy_1$ og $z_2 = x_2 + iy_2$, så har vi:

$$\begin{aligned} |e^{z_1} \cdot e^{z_2}| &= |e^{z_1}| \cdot |e^{z_2}| = \left| e^{x_1+iy_1} \right| \cdot \left| e^{x_2+iy_2} \right| = e^{x_1} \cdot e^{x_2} \\ &= e^{x_1+x_2} = \left| e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} \right| = |e^{z_1+z_2}| \\ \arg(e^{z_1} \cdot e^{z_2}) &= \arg(e^{z_1}) + \arg(e^{z_2}) \\ &= \arg(e^{x_1+iy_1}) + \arg(e^{x_2+iy_2}) = y_1 + y_2 \\ &= \arg(e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)}) = \arg(e^{z_1+z_2}) \end{aligned}$$

Tallene $e^{z_1+z_2}$ og $e^{z_1}e^{z_2}$ har altså samme modulus og samme argument. De er derfor ens.

1.3 Polær form

Polær form

- Den polære form for tallet a med modulus r og argument v blev sidste gang skrevet

$$a = r_v = r(\cos v + i \sin v)$$

Den vil i fremtiden blive skrevet således:

$$a = r \exp(iv) = re^{iv}$$

- Eksempel. Vi finder den polære form for tallet $-\sqrt{3} - i$. Modulus er $\sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ og et argument er $-\frac{5\pi}{6}$. Tegn! Så

$$-\sqrt{3} - i = 2 \exp\left(-i\frac{5\pi}{6}\right) = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

- Maple.

1.4 Moivres formel

Moivres formel

- For $n \in \mathbb{N}$ og $x \in \mathbb{R}$ gælder

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

- Bevis: $(\cos x + i \sin x)^n = (e^{ix})^n = e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$

- Eksempel.

$$\begin{aligned}
 \cos 3x &= \operatorname{Re}(\cos 3x + i \sin 3x) = \operatorname{Re}\left((\cos x + i \sin x)^3\right) \\
 &= \operatorname{Re}\left(\cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x\right) \\
 &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x) \\
 &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x
 \end{aligned}$$

- Ved ovenfor at erstatte Re med Im fås formlen

$$\begin{aligned}
 \sin 3x &= 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x \\
 &= 3(1 - \sin^2 x) \sin x - \sin^3 x \\
 &= -4 \sin^3 x + 3 \sin x
 \end{aligned}$$

- Maple.

1.5 Den komplekse logaritmefunktion

Den komplekse logaritmefunktion

- exp har ingen omvendt funktion indenfor \mathbb{C} , da

$$e^{z+ip2\pi} = e^z \cdot e^{ip2\pi} = e^z (\cos(p2\pi) + i \sin(p2\pi)) = e^z$$

- Hvis $z, w \in \mathbb{C}$ opfylder $\exp w = z$, så kaldes w en *logaritme* til z . Vi skriver $w = \ln z$.
- Lad $z \in \mathbb{C}$ med $z \neq 0$. Så har z følgende logaritmer

$$\ln z = \ln(|z|) + i(\arg z + p2\pi) = \ln(|z|) + i \arg z + ip2\pi$$

hvor $p \in \mathbb{Z}$, og $\arg z$ er et argument for z , og hvor $\ln(|z|)$ er den reelle velkendte logaritme af det positive tal $|z|$.

- Vi finder samtlige logaritmer til tallet $a = \sqrt{3} - i$. Da $|a| = 2$ og $\arg a = -\frac{\pi}{6}$ fås (med $p \in \mathbb{Z}$):

$$\ln a = \ln(\sqrt{3} - i) = \ln 2 - i\frac{\pi}{6} + p2\pi i$$

- Maple.

1.6 Den binome ligning I

Den binome ligning I

- Lad $n \in \mathbb{N}$ og $a \in \mathbb{C}$. En *binom ligning* har formen

$$z^n = a \tag{1}$$

- Løsningerne til (1) kaldes komplekse n 'te rødder af a .
- Rødderne i (1), hvor $a = re^{iv}$, $r \geq 0$, $v \in \mathbb{R}$, er givet ved

$$z = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{v}{n} + p\frac{2\pi}{n}\right)}, \quad p = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

- Bevis: Sæt $z = \rho e^{i\theta}$, med $\rho \geq 0$ og $\theta \in \mathbb{R}$. Ved indsættelse i (1) fås

$$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = re^{iv} \text{ og hermed } \rho^n e^{in\theta} = re^{iv}$$

De to sider af denne ligning er polære former af samme tal, så $\rho^n = r$ og $n\theta = v + p2\pi$, hvor $p \in \mathbb{Z}$. Heraf følger formlen.

- Korollar. Er z_0 en rod i ligningen $z^n = a$, så er samtlige rødder givet ved $z = z_0 e^{ip\frac{2\pi}{n}}$, $p = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

1.7 Den binome ligning II

Den binome ligning II

- For den binome ligning $z^2 = a = a_1 + ia_2 = re^{iv}$ gælder, at løsningerne kan skrives

$$\begin{aligned} z &= \pm \sqrt{r} e^{i\frac{v}{2}} \\ &= \pm \left(\sqrt{\frac{r+a_1}{2}} + i \cdot \text{sign}(a_2) \sqrt{\frac{r-a_1}{2}} \right) \end{aligned}$$

- Bevis. Vi viser den sidste version. Vi kan her forudsætte, at $-\pi < v \leq \pi$. Så gælder

$$\cos \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos v}{2}} \text{ og } \sin \frac{v}{2} = \text{sign}(a_2) \sqrt{\frac{1 - \cos v}{2}}$$

- Derfor fås

$$\begin{aligned} z &= \pm \sqrt{r} e^{i\frac{v}{2}} = \pm \sqrt{r} \left(\cos \frac{v}{2} + i \sin \frac{v}{2} \right) \\ &= \pm \left(\sqrt{\frac{r+r \cos v}{2}} + i \cdot \text{sign}(a_2) \sqrt{\frac{r-r \cos v}{2}} \right) \end{aligned}$$

- Hvoraf resultatet følger. Maple.

2 Rødder i polynomier

2.1 Andengradsligningen I

Andengradsligning I

- Vi løser

$$az^2 + bz + c = 0$$

hvor $a, b, c \in \mathbb{C}$, og $a \neq 0$.

- Vi har:

$$az^2 + bz + c = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$$

- Andengradsligningen kan altså omskrives til

$$\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

- Sæt $w = z + \frac{b}{2a}$, så har vi den binome ligning

$$w^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

2.2 Andengradsligningen II

Andengradsligning II

- Sæt $w = z + \frac{b}{2a}$, så har vi den binome ligning

$$w^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

- Denne har 2 (komplekse) rødder, som vi skriver som

$$\pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

- Så rødderne i andengradsligningen $az^2 + bz + c = 0$ er

$$z = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Eksempel. Løs ligningen $z^2 + z + 1 = 0$. Vi finder

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \begin{cases} \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

2.3 Andengradsligningen III

Andengradsligning III

- Eksempel. Løs ligningen $z^2 - 2z + (1 + i) = 0$. Vi finder

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1 + i)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4i}}{2}$$

- Vi skal så løse den binome ligning $w^2 = -4i$. Vi finder

$$\begin{aligned} w &= \pm \left(\sqrt{\frac{r+a_1}{2}} + i \cdot \text{sign}(a_2) \sqrt{\frac{r-a_1}{2}} \right) \\ &= \pm \left(\sqrt{\frac{4}{2}} - i \sqrt{\frac{4}{2}} \right) = \pm (\sqrt{2} - i\sqrt{2}) \end{aligned}$$

- Løsningerne til andengradsligningen er dermed

$$z = \frac{2 \pm (\sqrt{2} - i\sqrt{2})}{2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

2.4 Polynomier generelt

Polynomier generelt

- Et polynomium i den variable z er et udtryk af formen

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

- **Algebraens Fundamentalsætning.** Ethvert polynomium af grad ≥ 1 har mindst én rod indenfor de komplekse tal.
- Generelle løsningsformler findes for $n \leq 4$, men det kan bevises, at der ikke kan konstrueres generelle løsningsformler for $n \geq 5$.
- Husk dog, at et polynomium af vilkårlig høj grad men med kun to led kan løses ved en formel, der umiddelbart giver den polære form for løsningerne.
- Se Maple om 3. og 4. gradsligninger.

2.5 Faktorisering af polynomier I

Faktorisering af polynomier I

- En rod z_1 i polynomiet p har multipliciteten k , hvis $p(z) = (z - z_1)^k q(z)$, hvor $q(z)$ er et polynomium, og hvor z_1 ikke er rod i $q(z)$.
- Hvis multipliciteten er 1, siges roden at være simpel.
- Eksempel. $5z^4 - 50z^3 + 120z^2 + 160z - 640 = 5(z - 4)^3(z + 2)$. Så 4 er rod af multiplicitet 3, og -2 er rod af multiplicitet 1. -2 er altså en simpel rod.
- Polynomiet $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, hvor $n \geq 1$ (og $a_n \neq 0$) kan skrives som et produkt af a_n og n førstegradsfaktorer:

$$p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

- Ethvert polynomium af grad $n \geq 1$ har altså n rødder, hvis disse regnes med multiplicitet.

2.6 Faktorisering af polynomier II

Faktorisering af polynomier II

- Hvis et polynomium har reelle koefficienter og $z_1 \in \mathbb{C}$ er rod, så er også \bar{z}_1 rod.
- Ethvert polynomium af grad $n \geq 1$ og med reelle koefficienter kan skrives som et produkt af reelle første- og andengradsfaktorer.
- Eksempel. Hvis $2 + 3i$ er rod, så er $2 - 3i$ også.
- Så begge faktorerne $(z - (2 + 3i))$ og $(z - (2 - 3i))$ forekommer i en faktorisering af polynomiet.
- Vi betragter produktet af disse to faktorer:

$$(z - (2 + 3i))(z - (2 - 3i))$$

- Sætter andre parenteser:

$$= ((z - 2) - 3i)((z - 2) + 3i)$$

- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ bruges:

$$= (z - 2)^2 + 3^2 = z^2 - 4z + 13$$

3 Eulers formler

Eulers formler I

- Ifølge definitionen af den komplekse eksponentialfunktion har vi

$$\begin{aligned} e^{iv} &= \cos v + i \sin v \\ e^{-iv} &= \cos v - i \sin v \end{aligned}$$

- Ved addition af disse formler og efter division med 2 fås

$$\cos v = \frac{1}{2} (e^{iv} + e^{-iv})$$

- Tilsvarende fås ved subtraktion og division med $2i$

$$\sin v = \frac{1}{2i} (e^{iv} - e^{-iv})$$

3.1 Eulers formler II

Eulers formler II

- Vi ønsker $\sin^4 x$ udtrykt ved $\sin x, \sin 2x, \dots, \cos x, \cos 2x, \dots$
- Vi udnytter den ene af Eulers formler

$$\sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$

- og vi finder dermed

$$\sin^4 x = \left(\frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) \right)^4 = \frac{1}{(2i)^4} (e^{ix} - e^{-ix})^4$$

- Binomialformlen $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ benyttes:

$$= \frac{1}{16} (e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix})$$

•

$$= \frac{1}{16} (e^{4ix} + e^{-4ix} - 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6)$$

•

$$= \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}$$

3.2 Eulers formler III

Eulers formler III

- Så

$$\sin^4 x = \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}$$

- Ved hjælp af denne formel beregnes integralet

$$\int_0^\pi \sin^4 x dx$$

- som følger

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^4 x dx &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8} x \right]_0^\pi = \frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$