DesignMat
Lineære differentialligninger II

Preben Alsholm

Uge 10 Forår 2009

1 Lineære Differentialligninger af anden orden

1.1 Bestemmelse af en partikulær løsning

Bestemmelse af en partikulær løsning

- Vi betragter nu den inhomogene ligning

$$ax'' + bx' + cx = q(t) \qquad (Inhomogen)$$

- hvor højresiden har formen

$$q(t) = t^m e^{\alpha t} \begin{cases} \cos \beta t \\ \sin \beta t \end{cases}$$

- Disse højresider er løsninger til homogene lineære differentialligninger med konstante koefficienter!
- Vi ønsker at bestemme en partikulær løsning til *Inhomogen*.
- Opskrift på formen af en partikulær løsning til *Inhomogen* gives i det følgende skema.

1.2 Skema til ansats

Skema til ansats

$Q_m(t)$ er et givet polynomium af grad m. $P_m(t)$ og $R_m(t)$ er polynomier af grad m, hvor samtlige led forekommer (med ubestemte koefficienter).

$q(t)$	$Q_m(t)$	$Q_m(t)\,e^{\alpha t}$	$Q_m(t)\,e^{\alpha t}\cos\beta t$ (eller $\sin\beta t$)
q-rod	0	α	$\alpha \pm i\beta$
Ansats	$t^s P_m(t)$	$t^s P_m(t)\,e^{\alpha t}$	$t^s \begin{bmatrix} P_m(t)\,e^{\alpha t}\cos\beta t \\ +R_m(t)\,e^{\alpha t}\sin\beta t \end{bmatrix}$

s skal vælges som det mindste hele ikke-negative tal ($s = 0, 1, 2, 3 \dots$), som sikrer, at intet led i ansatsen løser den homogene ligning. (s er multipliciteten af "q-roden" i karakterpolynomiet). Hvis q-roden er rod i karakterpolynomiet, er der *resonans*.

1.3 Eksempel 1

Eksempel 1

- Vi finder en partikulær løsning til $x'' + 3x' + 2x = 20te^{3t}$.
- Karakterligningen har rødderne -2 og -1. Der er ikke resonans, idet q-roden er 3 (dobbeltrod).
- Ansats:
$$x_p(t) = (At + B) e^{3t}$$
- Ansatsen indsættes i differentialligningen:
$$\frac{d^2}{dt^2}\left((At+B)e^{3t}\right) + 3\frac{d}{dt}\left((At+B)e^{3t}\right) + 2(At+B)e^{3t} = 20te^{3t}$$
- Udregning og reduktion giver
$$te^{3t}(20A) + e^{3t}(9A + 20B) = 20te^{3t}$$
- Dette skal gælde for alle $t \in \mathbb{R}$. Vi må derfor forlange $20A = 20$ og $9A + 20B = 0$. Altså $A = 1$ og $B = -\frac{9}{20}$.
- En partikulær løsning er dermed $x_p(t) = \left(t - \frac{9}{20}\right) e^{3t}$.

1.4 Eksempel 2

Eksempel 2

- Differentialligningen $x'' + 3x' + 2x = 4t^2$ har samme homogene ligning som ovenfor. Ingen resonans.
- Ansats til en partikulær løsning:
$$x_p(t) = At^2 + Bt + C$$
- Ansatsen indsættes i differentialligningen:
$$\frac{d^2}{dt^2}\left(At^2 + Bt + C\right) + 3\frac{d}{dt}\left(At^2 + Bt + C\right) + 2\left(At^2 + Bt + C\right) = 4t^2$$
- Udregning og reduktion giver:
$$2At^2 + (6A + 2B)t + 2A + 3B + 2C = 4t^2$$
- Dette skal gælde for alle $t \in \mathbb{R}$. Vi må derfor forlange $2A = 4, 6A + 2B = 0$ og $2A + 3B + 2C = 0$. Altså $A = 2, B = -6$ og $C = 7$.
- En partikulær løsning er dermed $x_p(t) = 2t^2 - 6t + 7$.

1.5 Eksempel 3

Eksempel 3

- Differentialligningen $x'' + 3x' + 2x = 3e^{-2t}$ har igen samme homogene ligning som tidligere.
- Nu er der resonans, da højresiden $3e^{-2t}$ løser den homogene ligning.
- Den basale ansats til en partikulær løsning $x_p(t) = Ae^{-2t}$ må derfor modificeres til
$$x_p(t) = Ate^{-2t}$$
- Ansatsen indsættes i differentialligningen:
$$\frac{d^2}{dt^2}\left(Ate^{-2t}\right) + 3\frac{d}{dt}\left(Ate^{-2t}\right) + 2Ate^{-2t} = 3e^{-2t}$$
- Udregning og reduktion giver:
$$-Ae^{-2t} = 3e^{-2t}$$
- Vi må forlange, at $-A = 3$ altså $A = -3$. En partikulær løsning er dermed $x_p(t) = -3te^{-2t}$.

1.6 Eksempel 4

Eksempel 4

- Differentialligningen $x'' + 3x' + 2x = 10\cos t$ har samme homogene ligning som tidligere. Ingen resonans.
- Ansats til en partikulær løsning $x_p(t) = A\cos t + B\sin t$.
- Indsættelse: $\frac{d^2}{dt^2}(A\cos t + B\sin t) + 3\frac{d}{dt}(A\cos t + B\sin t) + 2(A\cos t + B\sin t) = 10\cos t$.
- Udregning og reduktion giver $(A + 3B)\cos t + (-3A + B)\sin t = 10\cos t$.
- Dette skal gælde for alle $t \in \mathbb{R}$. Vi må derfor forlange $A + 3B = 10$ og $-3A + B = 0$. Altså $A = 1, B = 3$.
- En partikulær løsning er dermed $x_p(t) = \cos t + 3\sin t$.

1.7 Eksempel 5 Kompleks gættemetode

Eksempel 5 kompleks gættemetode

- Betragt igen differentialligningen $x'' + 3x' + 2x = 10\cos t$.
- Da $10\cos t = \text{Re}\left(10e^{it}\right)$ betragter vi nu $x'' + 3x' + 2x = 10e^{it}$.
- Ansats til en partikulær løsning $x_p(t) = Ae^{it}$.

- Ansatsen indsættes i differentialligningen:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(Ae^{it}\right)+3\frac{d}{dt}\left(Ae^{it}\right)+2Ae^{it}=10e^{it}$$

- Udregning og reduktion giver $(1+3i)\,Ae^{it}=10e^{it}$.
- Vi må derfor forlange $A=\frac{10}{1+3i}=1-3i$. Altså er partikulær løsning til den komplekse ligning $x_p\,(t)=(1-3i)\,e^{it}$.
- Realdelen af denne er partikulær løsning til den oprindelige ligning, så $x_p\,(t)=\mathrm{Re}\left((1-3i)\,e^{it}\right)=\cos t+3\sin t$.

1.8 Eksempel 6 Kompleks gættemetode

Eksempel 6 kompleks gættemetode

- Betragt differentialligningen $x''+3x'+2x=2\sin t\cdot e^{-2t}$.
- Da $2\sin t\cdot e^{-2t}=\mathrm{Im}\left(2e^{(-2+i)t}\right)$ betragter vi nu $x''+3x'+2x=2e^{(-2+i)t}$.
- Ansats til en partikulær løsning $x_p\,(t)=Ae^{(-2+i)t}$.
- Indsættelse: $\frac{d^2}{dt^2}\left(Ae^{(-2+i)t}\right)+3\frac{d}{dt}\left(Ae^{(-2+i)t}\right)+2Ae^{(-2+i)t}=2e^{(-2+i)t}$.
- Udregning og reduktion giver $-(1+i)\,Ae^{(-2+i)t}=2e^{(-2+i)t}$.
- Vi må derfor forlange $A=\frac{-2}{1+i}=-1+i$. Altså er partikulær løsning til den komplekse ligning $x_p\,(t)=(-1+i)\,e^{(-2+i)t}$.
- Imaginærdelen af denne er partikulær løsning til den oprindelige ligning, så $x_p\,(t)=\mathrm{Im}\left((-1+i)\,e^{(-2+i)t}\right)=e^{-2t}\,(\cos t-\sin t)$.

2 Lineære Differentialligninger af n'te orden

2.1 Eksistens- og entydighed

Eksistens- og entydighed

- Vi betragter *lineære differentialligninger med konstante koefficienter*:

$$a_nx^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+\cdots+a_1x'+a_0x=q\,(t) \tag{1}$$

  med $q\in C\,(I)$, hvor I er et interval. $a_0,a_1,\ldots,a_n$ er reelle konstanter og $a_n\neq 0$.
- Teorien for n'te ordens lineære differentialligninger er ganske som for $n=2$.
- Sætning. Lad $t_0\in I$ og $x_0,v_1,v_2,\ldots,v_{n-1}\in\mathbb{R}$. *Begyndelsesværdiproblemet* for (1) med $x\,(t_0)=x_0,x'\,(t_0)=v_1,x''\,(t_0)=v_2,\ldots,x^{(n-1)}\,(t_0)=v_{n-1}$ har netop én løsning og den er defineret på hele intervallet I.

2.2 Eksempel 7

Eksempel 7

- $x''' + 2x'' + x' + 2x = 12\sin(2t)$. Karakterligningen: $R^3 + 2R^2 + R + 2 = 0$. Rødder -2 og $\pm i$.
- Fuldstændig løsning til den tilsvarende homogene ligning: $x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 \cos t + c_3 \sin t$.
- Da $12\sin(2t) = \operatorname{Im}\left(12e^{2it}\right)$ betragter vi nu $x''' + 2x'' + x' + 2x = 12e^{2it}$.
- Ansats $x_p(t) = Ae^{2it}$ indsættes: $\frac{d^3}{dt^3}\left(Ae^{2it}\right) + 2\frac{d^2}{dt^2}\left(Ae^{2it}\right) + \frac{d}{dt}\left(Ae^{2it}\right) + 2Ae^{2it} = 12e^{2it}$
- Udregning og reduktion giver $-6(1+i)Ae^{2it} = 12e^{2it}$. Så $A = \frac{-12}{6(1+i)} = -1+i$.
- En partikulær løsning til den komplekse ligning: $x_p(t) = (-1+i)e^{2it}$.
- Partikulær løsning til den oprindelige ligning $x_p(t) = \operatorname{Im}\left((-1+i)e^{2it}\right) = \cos(2t) - \sin(2t)$.
- Fuldstændig løsning til den oprindelige ligning: $x(t) = \cos(2t) - \sin(2t) + c_1 e^{-2t} + c_2 \cos t + c_3 \sin t$.