DesignMat Uge 11
Vektorrum

Preben Alsholm

Forår 2009

1 Vektorrum

1.1 Definition af vektorrum

Definition af vektorrum

- Lad $\mathbb{L}$ betegne $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Lad V være en ikke-tom mængde udstyret med en *addition* $`+`$ og en *multiplikation med skalar*.
- Vi forlanger, at disse to operationer opfylder

$$\begin{aligned} a, b &\in V \Longrightarrow a + b \in V \\ s &\in \mathbb{L} \wedge a \in V \Longrightarrow sa \in V \end{aligned}$$

- Desuden forlanger vi for alle $a, b, c \in V$ og $s, t \in \mathbb{L}$:

$$\begin{aligned} a + b &= b + a, \qquad (a+b)+c = a+(b+c) \\ \exists 0 &\in V \text{ så } a + 0 = a, \qquad \exists a_1 \in V \text{ så } a + a_1 = 0 \\ s\,(ta) &= (st)\,a, \qquad (s+t)\,a = sa + ta \\ s\,(a+b) &= sa + sb, \qquad 1a = a \end{aligned}$$

- V er da et *vektorrum* over $\mathbb{L}$. Hvis $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ er V et *reelt* vektorrum. Hvis $\mathbb{L} = \mathbb{C}$ er V et *komplekst* vektorrum.

1.2 Entydighed af nulelement og modsat element

Entydighed af nulelement og modsat element

- Nulelementet er entydigt bestemt: Hvis 0_1 og 0_2 begge er nulelementer, altså opfylder $a + 0 = a$ for alle a, så gælder

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2$$

- Hvis $a + a_1 = 0$ og $a + a_2 = 0$ (begge er *modsatte* elementer til a), så fås

$$\begin{aligned} a_2 &= a_2 + 0 = a_2 + (a + a_1) = (a_2 + a) + a_1 \\ &= (a + a_2) + a_1 = 0 + a_1 = a_1 \end{aligned}$$

- Det entydigt bestemte modsatte element til a betegnes med $-a$.
- Det ses af $(-a) + a = a + (-a) = 0$ at a er modsat element til $-a$ altså, at $-(-a) = a$.
- Sætning. $a + x = b$ har den entydigt bestemte løsning $x = b + (-a)$, $sa = 0 \Leftrightarrow s = 0 \vee a = 0$, $(-1)\,a = -a$.

1.3 Eksempler på vektorrum

Eksempler på vektorrum

- Mængden af geometriske vektorer i rummet V_g^3. Mængden af geometriske vektorer i planen V_g^2.
- Mængden af talsæt $\mathbb{R}^n$ med sædvanlig addition og multiplikation med skalar.
- Mængden $\mathbb{R}^{m\times n}$ af reelle $m \times n$-matricer med sædvanlig addition og multiplikation med skalar.
- Mængden af reelle polynomier af højst n'te grad $P_n(\mathbb{R})$. Sædvanlig addition af funktioner. Sædvanlig multiplikation med en skalar (en konstant!).
- Mængden af reelle kontinuerte funktioner defineret på intervallet I: $C(I)$. Operationer som for polynomier.

1.4 Underrum, Linearkombination

Underrum, Linearkombination

- Hvis U er en delmængde af vektorrummet V, og U med de arvede operationer selv er et vektorrum, så kaldes U et *underrum* af V.
- Sætning. Lad $U \subseteq V$ og $U \neq \varnothing$. Så er U et underrum af V hvis og kun hvis

$$\begin{aligned} a, b &\in U \Longrightarrow a + b \in U \\ s &\in \mathbb{L} \wedge a \in U \Longrightarrow sa \in U \end{aligned}$$

- *Trivielle* underrum af vektorrum V er V selv og $\{0\}$.
- Ved en af *linearkombination* af vektorerne $a_1, a_2, \ldots, a_p \in V$ forstås et udtryk af formen

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_p a_p$$

  hvor $c_1, c_2, \ldots, c_p \in \mathbb{L}$.
- Ved *span* $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ forstås mængden af linearkombinationer af vektorerne $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

1.5 Lineær uafhængighed, basis

Lineær uafhængighed, basis

- *span* $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ er et underrum af V. Det er det mindste underrum, der indeholder $a_1, a_2, \ldots, a_p$.
- Vektorerne $a_1, a_2, \ldots, a_p \in V$ siges at være *lineært uafhængige* hvis

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_p a_p = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$$

- $a_1, a_2, \ldots, a_p$ er altså lineært uafhængige, hvis $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_p v_p$ kun kan være nul, når alle koefficienterne er nul.
- Hvis vektorerne $a_1, a_2, \ldots, a_p$ ikke er lineært uafhængige, siges de at være *lineært afhængige*.
- En *basis* for et vektorrum V er et lineært uafhængigt system $a_1, a_2, \ldots, a_n$ af vektorer, som udspænder V, altså $V = \mathit{span}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

1.6 Eksempel 0

Eksempel 0

- Vektorerne e_1, e_2, e_3 i vektorrummet $\mathbb{R}^3$ givet ved

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  er lineært uafhængige og udgør en basis for $\mathbb{R}^3$: Den *kanoniske basis* for $\mathbb{R}^3$. (I bogen den *sædvanlige basis* i $\mathbb{R}^3$).

- Polynomierne $1, x, x^2, x^3, x^4$ i vektorrummet $P_4(\mathbb{R})$ af polynomier af grad højst 4 er lineært uafhængige og udgør en basis for $P_4(\mathbb{R})$: *monomiebasen*.

1.7 Eksempel 1

Eksempel 1

- Er vektorerne v_1, v_2, v_3 givet ved

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}$$

  lineært uafhængige?

- Vi undersøger om $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$ er mulig uden at $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
- Med $A = [v_1\ v_2\ v_3]$ og $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ kan vektorligningen skrives $Ax = 0$.

- Vektorerne v_1, v_2, v_3 er altså lineært uafhængige netop når $Ax = 0$ kun har den trivielle løsning $x = 0$.
- Resultatet udregnes nu ved Gausselimination. Se Maple for udregningerne. Vektorerne er lineært afhængige.

1.8 Eksempel 2

Eksempel 2

- Er vektorerne v_1, v_2, v_3 givet ved
$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ -11 \\ 12 \end{bmatrix}$$
lineært uafhængige?
- Med $A = [v_1\ v_2\ v_3]$ og x defineret som tidligere skal altså afklares om $Ax = 0$ kun har den trivielle løsning $x = 0$.
- Ved Gausselimination i Maple ses, at vektorerne er lineært uafhængige.
- Udgør de en basis for $\mathbb{R}^4$? Vi mangler at undersøge, om $\text{span}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^4$.
- Vi skal altså undersøge, om der for enhver given vektor $b \in \mathbb{R}^4$ findes tal x_1, x_2, x_3 så $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = b$.
- Dette er altså et spørgsmål om $Ax = b$ kan løses for ethvert $b \in \mathbb{R}^4$. Svar: Nej (se Maple).

1.9 Eksempel 3

Eksempel 3

- Er vektorerne $p_1, p_2, p_3, p_4 \in P_3(\mathbb{R})$ givet ved $p_1 = -2 - x - 2x^3, p_2 = 2 + x^2 - x^3, p_3 = -1 + x - x^2 - x^3$ og $p_4 = -1$ lineært uafhængige?
- Vi skal undersøge om $c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3 + c_4p_4 = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$ medfører, at $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$.
- Ved indsættelse og omordning efter potenser af x kan ligningen omskrives til $(-2c_1 + 2c_2 - c_3 - c_4) + x(-c_1 + c_3) + x^2(c_2 - c_3) + x^3(-2c_1 - c_2 - c_3) = 0$.
- Dette er opfyldt for alle $x \in \mathbb{R}$ hvis og kun hvis ligningssystemet
$$\begin{aligned} -2c_1 + 2c_2 - c_3 - c_4 &= 0 \\ -c_1 + c_3 &= 0 \\ c_2 - c_3 &= 0 \\ -2c_1 - c_2 - c_3 &= 0 \end{aligned}$$
kun har nulløsningen.

1.10 Eksempel 3 (fortsat)

Eksempel 3 (fortsat)

- Systemets koefficientmatrix er

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

  Altså: Har $Ac = 0$ kun den trivielle løsning $c = 0$?

- Gausselimination viser, at dette er tilfældet. p_1, p_2, p_3, p_4 er altså lineært uafhængige.

- Udgør de en basis for $P_3(\mathbb{R})$? Vi mangler at undersøge, om $\text{span}(p_1, p_2, p_3, p_4) = P_3(\mathbb{R})$.

- Findes der for enhver given vektor $p \in P_3(\mathbb{R})$ tal c_1, c_2, c_3, c_4 så $c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3 + c_4p_4 = p$?

- Søjlerne i A består af polynomiernes koefficienter! Lad b tilsvarende være koefficienterne i polynomiet p.

- Kan $Ac = b$ løses for ethvert $b \in \mathbb{R}^4$?

- Svar: Ja, med $T = [A|b]$ har vi $\rho(T) = 4 = \rho(A)$.