DesignMat Uge 12
Basis, koordinater, basisskifte

Preben Alsholm

Forår 2009

1 Vektorrum

1.1 Basis, Koordinater mht. basis

Basis, Koordinater mht. basis

- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er en *basis* for V hvis det er lineært uafhængigt og $V = span\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
- Hvis $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er en basis for V, så kan ethvert $v \in V$ skrives *entydigt* som en linearkombination $v = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n$.
- Bevis for entydighed: Hvis $v = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n$ og $v = y_1 a_1 + y_2 a_2 + \ldots + y_n a_n$ så har vi

$$(x_1 - y_1)\, a_1 + (x_2 - y_2)\, a_2 + \cdots + (x_n - y_n)\, a_n = v - v = 0$$

- Men da $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er lineært uafhængige, gælder $x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = \cdots = x_n - y_n = 0$.
- Talsættet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kaldes *koordinaterne* for v mht. basen $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

1.2 Koordinatfunktionen

Koordinatfunktionen

- Vi vil bruge betegnelsen $K_a\,(v)$ for koordinaterne af vektoren v mht. basen med navn a. Oftest skrives $K_a\,(v)$ som en søjlevektor:

$$K_a\,(v) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

  I Jens Eisings bog bruges dobbeltunderstregning.

- Koordinatfunktionen K_a, der til en vektor v knytter dennes koordinater mht. basis a, er *lineær*, dvs. for alle $u, v \in V$ og alle tal s gælder

$$\begin{aligned} K_a\,(u+v) &= K_a\,(u) + K_a\,(v) \\ K_a\,(sv) &= sK_a\,(v) \end{aligned}$$

1.3 Basis og Dimension I

Basis og Dimension I

- Hvis V har en basis bestående af n vektorer og $v_1, v_2, \ldots, v_m$ er m vektorer, hvor $m > n$, så er $v_1, v_2, \ldots, v_m$ lineært afhængige.
- Bevis. Lad $a_1, a_2, \ldots, a_n$ være en basis for V. Så kan $v_1, v_2, \ldots, v_m$ hver især udtrykkes ved $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
- Vi har altså tal v_{ij} så for ethvert $i = 1, 2, \ldots, m$ gælder $v_i = \sum_{j=1}^{n} v_{ij} a_j$.
- Antag, at $\sum_{i=1}^{m} c_i v_i = 0$. Så fås $\sum_{i=1}^{m} c_i \left(\sum_{j=1}^{n} v_{ij} a_j \right) = 0$.
- Omordning giver $\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} c_i v_{ij} \right) a_j = 0$.
- Men $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er lineært uafhængige, så $\sum_{i=1}^{m} c_i v_{ij} = 0$ for alle $j = 1, 2, \ldots, n$.
- Dette system af homogene ligninger har flere ubekendte end ligninger. Der er derfor ikke-trivielle løsninger, så $v_1, v_2, \ldots, v_m$ er lineært afhængige.

1.4 Basis og Dimension II

Basis og Dimension II

- Alle baser for V har altså samme antal vektorer. Dette tal kaldes *dimensionen* af V og betegnes med $\dim V$.
- Den *kanoniske* basis for $\mathbb{R}^n$: $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$. $\dim \mathbb{R}^n = n$.
- *Monomiebasen* for $P_n(\mathbb{R})$: Polynomierne $1, x, x^2, \ldots, x^n$. $\dim P_n(\mathbb{R}) = n + 1$.
- Supplering. Ethvert lineært uafhængigt system af vektorer kan udvides til en basis for V.
- Udtynding. Lad $span\left(a_1, a_2, \ldots, a_p\right) = V$. Så kan der blandt $a_1, a_2, \ldots, a_p$ udtages en basis for V.

1.5 Regning med koordinater

Regning med koordinater

- Lad $a_1, a_2, \ldots, a_n$ være en basis for V. Lad $v_1, v_2, \ldots, v_p$ være vektorer i V.
- Så gælder: $b \in span\left(v_1, v_2, \ldots, v_p\right) \iff K_a(b) \in span\left(K_a(v_1), K_a(v_2), \ldots, K_a(v_p)\right)$.
- Bevis: $b \in span\left(v_1, v_2, \ldots, v_p\right)$ netop hvis der findes tal $x_1, x_2, \ldots, x_p$ så $b = x_1 v_1 + \ldots + x_p v_p$.
- Dette er ensbetydende med $K_a(b) = K_a\left(x_1 v_1 + \ldots + x_p v_p\right) = x_1 K_a(v_1) + \ldots + x_p K_a(v_p) \in span\left(K_a(v_1), K_a(v_2), \ldots, K_a(v_p)\right)$.

- $v_1, v_2, \ldots, v_p$ lineært uafhængige $\Longleftrightarrow K_a(v_1), K_a(v_2), \ldots, K_a(v_p)$ lineært uafhængige.
- Bevis: $x_1 v_1 + \ldots + x_p v_p = 0 \Leftrightarrow K_a(x_1 v_1 + \ldots + x_p v_p) = x_1 K_a(v_1) + \ldots + x_p K_a(v_p) = 0$.

1.6 Koordinatmatrix

Koordinatmatrix

- Lad $a_1, a_2, \ldots, a_n$ være en basis for V. Lad $v_1, v_2, \ldots, v_p$ være vektorer i V.
- Matricen ${}_aV = \begin{bmatrix} K_a(v_1) & K_a(v_2) & \ldots & K_a(v_p) \end{bmatrix}$, kaldes koordinatmatricen for $v_1, v_2, \ldots, v_p$ mht. basis a.
- $b \in span(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ hvis og kun hvis ligningssystemet ${}_aVx = K_a(b)$ har en løsning.
- $v_1, v_2, \ldots, v_p$ er lineært uafhængige netop hvis ${}_aVx = 0$ kun har nulløsningen.
- Lad $\dim V = n$. Vektorerne $b_1, b_2, \ldots, b_n$ udgør en basis for V netop hvis koordinatmatricen ${}_aB = [K_a(b_1) \quad \ldots \quad K_a(b_n)]$ er regulær.
- $\dim span(v_1, v_2, \ldots, v_p) = \rho({}_aV)$.

1.7 Dimension af række- og søjlerum

Dimension af række- og søjlerum

- Efter en rækkeoperation på en matrix har det nye søjlerum samme *dimension* som det gamle.
- Efter en rækkeoperation er selve rækkerummet uændret, ikke kun dimensionen.
- Ved rækkereduktion til echelonform ses derfor, at rækkerum og søjlerum har samme dimension, nemlig rangen af matricen.
- Heraf følger, at $\rho(A^T) = \rho(A)$ (som ellers bevises vha. LU-faktorisering i bogen).

1.8 Basisskifte

Basisskifte

- Lad $a_1, a_2, \ldots, a_n$ og $b_1, b_2, \ldots, b_n$ begge være baser for V.
- Vi skal lade ${}_aM_b$ betegne koordinatmatricen for $b_1, b_2, \ldots, b_n$ mht. basis a, altså
$${}_aM_b = [K_a(b_1) \quad K_a(b_2) \quad \ldots \quad K_a(b_n)]$$
- Så gælder $K_a(v) = {}_aM_b K_b(v)$ for alle $v \in V$.

- Bevis. Med $y = K_b(v)$ har vi $v = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$ så

$$\begin{aligned} K_a(v) &= K_a(y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n) = y_1 K_a(b_1) + \ldots + y_n K_a(b_n) \\ &= [K_a(b_1) \quad K_a(b_2) \quad \ldots \quad K_a(b_n)]\, y = {}_a M_b K_b(v) \end{aligned}$$

- Vi har åbenbart, at $({}_a M_b)^{-1} = {}_b M_a$.

1.9 Basisskifte: Eksempel 1

Basisskifte: Eksempel 1

- Lad e være navnet på den kanoniske basis i $\mathbb{R}^3$. Lad basen a bestå af vektorerne $a_1 = (2,3,4), a_2 = (7,9,13), a_3 = (1,1,1)$.
- Vi har ${}_e M_a = [K_e(a_1) \quad K_e(a_2) \quad K_e(a_3)] = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \\ 4 & 13 & 1 \end{bmatrix}$.
- og dermed ${}_a M_e = ({}_e M_a)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$.
- Koordinaterne for $v = (1,2,3)$ i basis a er derfor $K_a(v) =_a M_e K_e(v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

1.10 Basisskifte: Eksempel 2

Basisskifte: Eksempel 2

- Lad m være monomiebasen $\left(1, x, x^2, x^3\right)$ i $P_3(\mathbb{R})$.
- Lad basen c bestå af de 4 første Chebyshev-polynomier $T_1 = 1, T_2 = x, T_3 = -1 + 2x^2, T_4 = -3x + 4x^3$.
- ${}_m M_c = [K_m(T_1) \quad K_m(T_2) \quad K_m(T_3) \quad K_m(T_4)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.
- og dermed ${}_c M_m = ({}_m M_c)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.
- Koordinaterne for $p = 1 + x + 2x^2 - 7x^3$ i Cheb-basen: $K_c(p) =_c M_m K_m(p) = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{17}{4} \\ 1 \\ -\frac{7}{4} \end{bmatrix}$.