DesignMat Uge 1
Gensyn med forårets stof

Preben Alsholm

Efterår 2009

1 Forårets pensum

1.1 Taylorpolynomium

Taylorpolynomium

- Det n'te Taylorpolynomium for f med udviklingspunkt x_0 :

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \end{aligned}$$

- Dette kan også skrives

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

idet vi definerer $0! = 1$ og $f^{(0)} = f$.

1.2 Taylors formel med Lagrange's restled

Taylors formel med Lagrange's restled

- Hvad er den fejl man begår ved at erstatte en funktion f med dens Taylorpolynomium P_n?
- Taylors formel: Lad f være $n+1$ gange differentiabel i intervallet I og lad $x_0 \in I$. For givet $x \in I$ findes et tal ξ mellem x_0 og x, så

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \\ &\quad \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

- Altså $f(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1} = P_n(x) + R_n(x)$.

1.3 Lineært ligningssystem

Lineært ligningssystem

- Et lineært ligningssystem:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- Koefficientmatrix, Totalmatrix

$$\begin{array}{rcl} A & = & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ T & = & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \end{array}$$

1.4 Gausselimination

Gausselimination

- Tilladte operationer på rækkerne i totalmatricen:

  1. $R_i \leftrightarrow R_j$
  2. $R_i := cR_i$ hvor $c \neq 0$
  3. $R_i := R_i + cR_j$ hvor $i \neq j$.

- Vi vil ved rækkeoperationer bringe matricen på echelonform:

$$\begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & \# & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & \# \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.5 Antal løsninger

Antal løsninger

- m ligninger med n ubekendte. Koefficientmatrix A, totalmatrix $T = [A|b]$.
- Hvis $\rho(T) > \rho(A)$, så ingen løsninger.
- Hvis $\rho(T) = \rho(A) = n$, så præcis én løsning.

- Hvis $\rho(T) = \rho(A) = \rho < n$, så uendeligt mange løsninger. med $n - \rho$ frie variable.
- En $n \times n$ matrix A kaldes *regulær*, hvis $\rho(A) = n$.
- Et kvadratisk ligningssystem har netop én løsning, hvis og kun hvis A er regulær.

1.6 Matrixmultiplikation

Matrixmultiplikation

- A en $m \times n$-matrix, og $x \in \mathbb{R}^n$. Skriv $A = [a_1\ a_2\ \ldots\ a_n]$, hvor $a_i \in \mathbb{R}^m$. Så definerer vi produktet Ax ved

$$Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n$$

- Ligningssystemet med koefficientmatricen A og højresiden b kan nu skrives $Ax = b$.
- Alternativ udregning af Ax: Skalarprodukterne af rækkerne i A med søjlen x.
- Multiplikation af matricer: A er $m \times n$ og B er $n \times p$: $AB = A\left[b_1\ b_2\ \ldots\ b_p\right] = \left[Ab_1\ Ab_2\ \ldots\ Ab_p\right]$.
- Ækvivalent definition (der bruges i JE): $(AB)_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{21} + \ldots + a_{in} b_{n1}$.

1.7 Invers matrix

Invers matrix

- *Definition.* A er invertibel, hvis der findes en matrix C, så $AC = CA = I$.
- Den inverse af A betegnes med A^{-1}.
- Matricen A er invertibel hvis og kun hvis A er regulær.
- Matricen A^{-1} er entydigt bestemt som løsningen C til $AC = I$.
- Algoritme: Gausselimnationen $[A \mid I] \longrightarrow [I \mid C]$.
- $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A, \qquad (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}, \qquad \left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$

1.8 Determinant

Determinant

- Lad A være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- *Definition.* $\det A = \sum_{S_n} sgn\,(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$, hvor S_n betegner mængden af permutationer S_n af tallene $1, 2, \dots, n$.

- Der gælder om rækkeoperationer, at

  1. $R_i \longleftrightarrow R_j$ $(i \neq j)$ skifter fortegn på determinanten.
  2. $R_i := kR_i$ gør determinanten k gange større.
  3. $R_i := R_i + kR_j$ $(i \neq j)$ ændrer ikke determinantens værdi.

- A er regulær, hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, $\quad \det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$, $\quad \det\left(A^T\right) = \det A$.

1.9 Komplement til matrix

Komplement til matrix

- Determinanten af A kan udregnes således (*udvikling i komplementer langs første række)*:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} - \\ &\quad \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} K_{1j} \end{aligned}$$

- hvor (i, j)-komplementet til A er defineret ved $K_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

- Mere generelt gælder: $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} K_{ij}$ for ethvert i og $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} K_{ij}$ for ethvert j.

1.10 Egenværdier og egenvektorer for matricer

Egenværdier og egenvektorer for matricer

- Lad A være en kvadratisk matrix. Tallet λ kaldes en *egenværdi* for A, hvis der findes en vektor $v \neq 0$, så

$$Av = \lambda v \tag{1}$$

- En vektor v, der opfylder (1), kaldes en *egenvektor* hørende til egenværdien λ.
- Egenværdierne for A er rødderne i *karakterpolynomiet* $\det(A - \lambda I)$.
- Egenværdier og spor og determinant:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n &= \mathit{spor}\,(A) \\ \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n &= \det A \end{aligned}$$

- Hvis roden λ_1 har multiplicitet k i $p(\lambda)$, så har egenværdien λ_1 *algebraisk multiplicitet* k.
- Hvis matricen $A - \lambda_1 I$ har rang $n - j$, så har λ_1 *geometrisk multiplicitet* j.
- Den geometriske multiplicitet er lig med antallet af frie parametre i løsningerne til $(A - \lambda_1 I)\, x = 0$.

1.11 Diagonaliserbare matricer

Diagonaliserbare matricer

- A er diagonaliserbar, hvis der findes en invertibel matrix V, så $\Lambda = V^{-1}AV$ er en diagonalmatrix.
- Hvis $\Lambda = V^{-1}AV$, så gælder $A = V\Lambda V^{-1}$ og omvendt.
- En $n \times n$-matrix A er diagonaliserbar, hvis og kun hvis der findes en invertibel matrix V, hvis søjler er egenvektorer $v_1, v_2, \ldots, v_n$ for A.
- I bekræftende fald er $V^{-1}AV$ den diagonalmatrix, der har egenværdierne $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ for A i diagonalen.

1.12 Komplekse tal

Komplekse tal

- $\mathbb{C}$ er mængden af punkter ii planen. Planen identificeres med $\mathbb{R}^2$, så $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.
- Tallet $i = (0, 1)$ er den imaginære enhed.
- Multiplikationen indføres så $i^2 = -1$ og samtlige kendte regneregler fra de reelle tal stadig gælder.
- $a = (a_1, a_2)$ skrives nu $a = a_1 + ia_2$.
- Realdel: $\operatorname{Re} a = a_1$. Imaginærdel: $\operatorname{Im} a = a_2$. $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ (modulus, absolutværdi, numerisk værdi).
- Kompleks konjugation: $\overline{a} = \overline{a_1 + ia_2} = a_1 - ia_2$.
- $\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b}, \qquad \overline{(ab)} = \overline{a}\overline{b}$.
- $|ab| = |a|\,|b|\,, \qquad |a^n| = |a|^n$.
- $\arg(ab) = \arg a + \arg b, \qquad \arg(a^n) = n \arg a, \qquad \arg\left(\frac{a}{b}\right) = \arg a - \arg b$.

1.13 Kompleks eksponentialfunktion

Kompleks eksponentialfunktion

- *Definition:* $\exp(x+iy) = \exp x \cdot (\cos y + i \sin y)$ altså $e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$.
- Når $x, y \in \mathbb{R}$ gælder $\left|e^{x+iy}\right| = e^x, \quad \arg\left(e^{x+iy}\right) = y$.
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$ altså $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.
- Polær form: $a = re^{iv}$, hvor $r = |a|$ og $v = \arg a$.
- Moivres formel: $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$.
- Eulers formler: $\cos v = \frac{1}{2}\left(e^{iv} + e^{-iv}\right), \qquad \sin v = \frac{1}{2i}\left(e^{iv} - e^{-iv}\right)$.
- Den binome ligning $z^n = a = re^{iv}$ har løsningerne $z = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{v}{n} + p\frac{2\pi}{n}\right)}, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

1.14 Polynomier

Polynomier

- Rødderne i andengradsligningen $az^2 + bz + c = 0$ er som sædvanligt $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
- **Algebraens Fundamentalsætning**. Ethvert polynomium af grad ≥ 1 har mindst én rod indenfor de komplekse tal.
- Roden z_1 i polynomiet p har multipliciteten k, hvis $p(z) = (z - z_1)^k q(z)$, hvor $q(z_1) \neq 0$.
- Polynomiet $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, hvor $n \geq 1$ (og $a_n \neq 0$) kan skrives $p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$.
- Hvis et polynomium har reelle koefficienter og $z_1 \in \mathbb{C}$ er rod, så er også $\overline{z_1}$ rod.

1.15 Differentialligning af 1. orden

Lineær differentialligning af 1. orden

- Differentialligningen $a(t)x' + b(t)x = c(t)$, hvor $t \in I$ er lineær og af første orden.
- Differentialligningen $x' + p(t)x = q(t)$ er normeret.
- Den fuldstændige løsning til $x' + p(t)x = q(t)$ er givet ved $x(t) = e^{-P(t)} \int e^{P(t)} q(t)\, dt + Ce^{-P(t)}$, hvor $P(t) = \int p(t)\, dt$.
- Når $p, q \in C(I)$ og$t_0 \in I$ og $x_0 \in \mathbb{R}$., så har begyndelsesværdiproblemet $x' + p(t)x = q(t)$ med $x(t_0) = x_0$præcis én løsning.

1.16 Differentialligning af 2. orden

Lineær differentialligning af 2. orden med konstante koefficienter

- Betragter $ax'' + bx' + cx = q(t)$ med $q \in C(I)$, hvor I er et interval og $a, b, c \in \mathbb{R}$ og $a \neq 0$.
- Lad $t_0 \in I$ og $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$. Begyndelsesværdiproblemet bestående af differentialligningen med $x(t_0) = x_0$ og $x'(t_0) = v_0$ har netop én løsning og den er defineret på hele intervallet I.
- Når $q(t) = 0$ kaldes differentialligningen homogen.
- Karakterligningen $aR^2 + bR + c = 0$.
- To forskellige reelle rødder r_1 og r_2. Fuldstændige løsning $x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$, hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
- Dobbeltrod r. Fuldstændig løsning $x(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$, hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
- Imaginære rødder $\alpha \pm i\beta$. Fuldstændig løsning $x(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$, hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
- Den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning er summen af en partikulær løsning og den fuldstændige løsning til den homogene ligning.

1.17 Partikulær løsning

Bestemmelse af en partikulær løsning

- Betragt den inhomogene ligning $ax'' + bx' + cx = q(t)$, hvor højresiden har formen
$$q(t) = t^m e^{\alpha t} \begin{cases} \cos\beta t \\ \sin\beta t \end{cases}$$
-

$q(t)$	$Q_m(t)$	$Q_m(t)\, e^{\alpha t}$	$Q_m(t)\, e^{\alpha t} \cos\beta t$ (eller $\sin\beta t$)
q-rod	0	α	$\alpha \pm i\beta$
Ansats	$t^s P_m(t)$	$t^s P_m(t)\, e^{\alpha t}$	$t^s \left[\begin{array}{c} P_m(t)\, e^{\alpha t} \cos\beta t \\ +R_m(t)\, e^{\alpha t} \sin\beta t \end{array} \right]$

- s skal vælges som det mindste hele ikke-negative tal ($s = 0, 1, 2, \ldots$), som sikrer, at intet led i ansatsen løser den homogene ligning.

1.18 Kompleks gættemetode

Kompleks gættemetode

- Differentialligningen $x'' + 3x' + 2x = 10\cos t$ erstattes af $x'' + 3x' + 2x = 10e^{it}$.
- Ansats til en partikulær løsning $x_p(t) = Ae^{it}$ indsættes i differentialligningen.

- Heraf fås $A = 1 - 3i$. Partikulær løsning til den komplekse ligning $x_p(t) = (1-3i)e^{it}$.
- Så partikulær løsning til den oprindelige ligning er $x_p(t) = \mathrm{Re}\left((1-3i)e^{it}\right) = \cos t + 3\sin t$.

1.19 sinh, cosh, tanh

sinh, cosh, tanh

- $\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right), \qquad \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$.
- $\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x, \quad \frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$.
- Formel: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.
- $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

1.20 arcsin, arccos, arctan

Arcusfunktioner: arcsin, arccos, arctan

- arcsin er den omvendte funktion til restriktionen af sin til intervallet $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- $\arcsin(a) = b \Longleftrightarrow \sin(b) = a \wedge b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- $\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- arccos er den omvendte funktion til restriktionen af cos til intervallet $[0, \pi]$.
- $\arccos(a) = b \Longleftrightarrow \cos(b) = a \wedge b \in [0, \pi]$.
- $\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- arctan er den omvendte funktion til restriktionen af tan til intervallet $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- $\arctan(a) = b \Longleftrightarrow \tan(b) = a \wedge b \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- $\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$.

1.21 Vektorrum

Vektorrum

- Lad $\mathbb{L}$ betegne $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Lad V være en ikke tom mængde udstyret med en *addition* $'+'$ og en *multiplikation med skalar*.
- Vi forlanger, at disse to operationer opfylder

$$
\begin{aligned}
a, b &\in V \Longrightarrow a + b \in V \\
s &\in \mathbb{L} \wedge a \in V \Longrightarrow sa \in V
\end{aligned}
$$

- Desuden forlanger vi for alle $a, b, c \in V$ og $s, t \in \mathbb{L}$:

$$\begin{aligned} a+b &= b+a, \qquad (a+b)+c = a+(b+c) \\ \exists 0 &\in V \text{ så } a+0=a, \qquad \exists a_1 \in V \text{ så } a+a_1=0 \\ s(ta) &= (st)a, \qquad (s+t)a = sa+ta \\ s(a+b) &= sa+sb, \qquad 1a=a \end{aligned}$$

- V er da et *vektorrum* over $\mathbb{L}$. Hvis $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ er V et *reelt* vektorrum. Hvis $\mathbb{L} = \mathbb{C}$ er V et *komplekst* vektorrum.

1.22 Underrum, Linearkombination

Underrum, Linearkombination

- Hvis U er en delmængde af vektorrummet V, og U med de arvede operationer selv er et vektorrum, så kaldes U et *underrum* af V.
- Sætning. Lad $U \subseteq V$ og $U \neq \varnothing$. Så er U et underrum af V hvis og kun hvis

$$\begin{aligned} a, b &\in U \Longrightarrow a+b \in U \\ s &\in \mathbb{L} \wedge a \in U \Longrightarrow sa \in U \end{aligned}$$

- *Trivielle* underrum af vektorrum V er V selv og $\{0\}$.
- Ved en af *linearkombination* af vektorerne $a_1, a_2, \ldots, a_p \in V$ forstås et udtryk af formen
$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_p a_p$$
hvor $c_1, c_2, \ldots, c_p \in \mathbb{L}$.
- Ved *span* $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ forstås mængden af linearkombinationer af vektorerne $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

1.23 Lineær uafhængighed, basis

Lineær uafhængighed, basis

- *span* $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ er et underrum af V. Det er det mindste underrum, der indeholder $a_1, a_2, \ldots, a_p$.
- Vektorerne $a_1, a_2, \ldots, a_p \in V$ siges at være *lineært uafhængige* hvis
$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_p a_p = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$$
- $a_1, a_2, \ldots, a_p$ er altså lineært uafhængige, hvis $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_p v_p$ kun kan være nul, når alle koefficienterne er nul.
- Hvis vektorerne $a_1, a_2, \ldots, a_p$ ikke er lineært uafhængige, siges de at være *lineært afhængige*.
- En *basis* for et vektorrum V er et lineært uafhængigt system $a_1, a_2, \ldots, a_n$ af vektorer, som udspænder V, altså $V = span\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

1.24 Koordinater

Koordinater mht. basis

- Lad $a_1, a_2, \dots, a_n$ være en basis for V. Så kan ethvert $v \in V$ skrives entydigt som en linearkombination af $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$v = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$$

- Talsættet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kaldes koordinaterne for v mht. basen $a_1, a_2, \dots, a_n$.
- Betegnelse: $K_a(v)$ for koordinaterne af v mht. basen a. $K_a(v) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.
- Matricen ${}_aV = \begin{bmatrix} K_a(v_1) & K_a(v_2) & \dots & K_a(v_p) \end{bmatrix}$, kaldes koordinatmatricen for $v_1, v_2, \dots, v_p$ mht. basis $a = a_1, a_2, \dots, a_n$.
- Da $x_1 v_1 + \dots + x_p v_p = 0 \Leftrightarrow {}_aVx = 0$ er $v_1, v_2, \dots, v_p$ lineært uafhængige netop hvis ${}_aVx = 0$ kun har nulløsningen.

1.25 Basisskifte

Basisskifte

- Lad $a_1, a_2, \dots, a_n$ og $b_1, b_2, \dots, b_n$ begge være baser for V.
- ${}_aM_b = [K_a(b_1) \quad K_a(b_2) \quad \dots \quad K_a(b_n)]$ er basisskiftematricen (koordinatskiftematricen) fra b til a.
- $K_a(v) = {}_aM_b K_b(v)$ for alle $v \in V$.
- $({}_aM_b)^{-1} = {}_bM_a$.