DesignMat Uge 2
Lineære afbildninger

Preben Alsholm

Efterår 2009

1 Lineære afbildninger

1.1 Definition

Definition

- Lad V og W være vektorrum over samme skalarlegeme $\mathbb{L}$ (altså enten $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ for begge).
- Afbildningen $f : V \to W$ kaldes *lineær*, hvis for alle $u, v \in V$ og $s \in \mathbb{L}$ vi har

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(u) + f(v) \\ f(su) &= sf(u) \end{aligned}$$

- Lad $a_1, a_2, \ldots, a_n$ være en basis for V. Vi så sidst, at koordinatafbildningen $K_a : V \to \mathbb{L}^n$ er lineær.
- *Kernen* for $f : V \to W$ er mængden $\ker f = \{v \in V \,|\, f(v) = 0\}$. Kaldes også *nulrummet* og betegnes ofte i stedet med $N(f)$. Kernen er et underrum af V.
- *Billedrummet* for f er $f(V) = \{w \in W \,|\, \exists v \in V \text{ så } f(v) = w\}$. Billedrummet er et underrum af W.

1.2 Eksempel 1 på lineær afbildning

Eksempel 1 på lineær afbildning

- Lad A være en $m \times n$-matrix. Definer afbildningen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ved $f(x) = Ax$ for alle $x \in \mathbb{R}^n$.
- f er lineær: For alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ og $s \in \mathbb{R}$ gælder $f(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = f(x) + f(y)$ og $f(sx) = A(sx) = sAx = sf(x)$.
- $\ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax = 0\} = N(A)$ nulrummet for matricen A.
- $f(\mathbb{R}^n) = Col(A) =$ søjlerummet, rummet udspændt af søjlerne i A.

- Konkret eksempel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. $\ker(f) = span\left([-2\ 1\ 0]^T\right)$. $f\left(\mathbb{R}^3\right) = \mathbb{R}^2$.
- Vi skal senere se, at alle lineære afbildninger mellem endelig-dimensionale vektorrum kan repræsenteres ved matrixafbildninger.

1.3 Eksempel 2 på lineær afbildning

Eksempel 2 på lineær afbildning

- Lad $P_n(\mathbb{R})$ være mængden af reelle polynomier af grad højst n og med variabelnavn x.
- Differentiationsoperatoren $D_x : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ givet ved $D_x(p(x)) = p'(x)$ for alle $p(x) \in P_n(\mathbb{R})$.
- At D_x er lineær er en velkendt sag om differentiation af sum og differentiation af udtryk ganget med en konstant.
- $\ker(D_x) = P_0(\mathbb{R})$ altså mængden af konstante polynomier.
- $D_x(P_n(\mathbb{R})) = P_{n-1}(\mathbb{R})$.
- Bemærk, at vi kunne have betragtet D_x som en afbildning fra $P_n(\mathbb{R})$ til $P_{n-1}(\mathbb{R})$. Den ville så have været surjektiv.

1.4 Eksempel 3 og 4 på lineær afbildning

Eksempel 3 og 4 på lineær afbildning

- Afbildningen $D : C^1(I) \to C^0(I)$ givet ved $D(g) = g'$ for alle $g \in C^1(I)$ er lineær.
- $\ker(D)$ er mængden af funktioner konstante på intervallet I.
- D er surjektiv, da enhver kontinuert funktion har en stamfunktion.
- Differentialoperatoren $d : C^2(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ givet ved $d(g) = 3g'' + 2g' - 5g$ for alle $g \in C^2(\mathbb{R})$ er lineær.
- $\ker(d)$ er mængden af løsninger til den homogene lineære differentialligning $3g'' + 2g' - 5g = 0$.
- Den fuldstændige løsning er $g(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-\frac{5}{3}t}$.
- Vi ser, at en basis for $\ker(d)$ er funktionerne $t \mapsto e^t$ og $t \mapsto e^{-\frac{5}{3}t}$. Så $\dim \ker(d) = 2$.
- At billedrummet $d\left(C^2(\mathbb{R})\right) = C^0(\mathbb{R})$ følger af, at $3g'' + 2g' - 5g = q$ har en løsning for alle $q \in C^0(\mathbb{R})$.

1.5 Struktursætning mm.

Struktursætning mm.

- Hvis $x_p \in V$ er en partikulær løsning til den lineære ligning $f(x) = b$, så er den fuldstændige løsning summen af x_p og den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning $f(x) = 0$.
- Som bekendt er denne sætning meget anvendelig, når f er en lineær differentialoperator.
- Så lyder den: Hvis x_p er en partikulær løsning til den inhomogene differentialligning, så er den fuldstændige løsning summen af x_p og den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene differentialligning.
- *Rangen* af f defineres som $\rho(f) = \dim f(V)$.
- *Nulliteten* for f defineres som $\nu(f) = \dim \ker(f)$.
- Dimensionssætningen. Lad $f : V \to W$ være lineær. Så gælder $\dim V = \nu(f) + \rho(f)$.
- Beviset udskydes til matrixfremstillingen for en lineær afbildning er på plads.

1.6 Matrixfremstilling for lineære afbildninger I

Matrixfremstilling for lineære afbildninger I

- Lad $f : V \to W$. Lad $a_1, a_2, \dots, a_n$ være en basis for V, og lad $c_1, c_2, \dots, c_m$ være en basis for W.
- Afbildningsmatricen for f mht. de givne baser defineres som

$$ {}_cF_a = \begin{bmatrix} K_c(f(a_1)) & K_c(f(a_2)) & \dots & K_c(f(a_n)) \end{bmatrix} $$

- ${}_cF_a$ er åbenbart en $m \times n$-matrix.
- Der er en enentydig sammenhæng mellem $m \times n$-matricer og lineære afbildninger fra V til W.
- Sætning 6.6. $K_c(f(v)) = {}_cF_aK_a(v)$ for alle $v \in V$.
- Bevis. Skriv $v = x_1a_1 + \dots + x_na_n$. Så er $x = K_a(v)$ og $f(v) = x_1f(a_1) + \dots + x_nf(a_n)$.
- Dermed fås $K_c(f(v)) = x_1K_c(f(a_1)) + \dots + x_nK_c(f(a_n)) = [K_c(f(a_1)) \quad K_c(f(a_2)) \quad \dots \quad K_c(f(a_n$ ${}_cF_aK_a(v)$.

1.7 Eksempel 1 på afbildningsmatrix

Eksempel 1 på afbildningsmatrix

- $D_x : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ givet ved $D_x(p(x)) = p'(x)$ for alle $p(x) \in P_3(\mathbb{R})$.
- Monomiebasen $(m3)$ i $P_3(\mathbb{R})$, altså $1, x, x^2, x^3$ og monomiebasen $(m2)$ i $P_2(\mathbb{R})$, altså $1, x, x^2$.
- ${}_{m2}F_{m3} = \left[K_{m2}(D_x(1)) \quad K_{m2}(D_x(x)) \quad K_{m2}\left(D_x\left(x^2\right)\right) \quad K_{m2}\left(D_x\left(x^3\right)\right) \right]$.
- ${}_{m2}F_{m3} = \left[K_{m2}(0) \quad K_{m2}(1) \quad K_{m2}(2x) \quad K_{m2}\left(3x^2\right) \right]$.
- ${}_{m2}F_{m3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.
- Polynomiet $p(x) = 7x^3 + 4x + 2$ kan nu differentieres således $K_{m2}(D_x(p(x))) = {}_{m2}F_{m3}K_{m3}(p(x)) = {}_{m2}F_{m3} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 21 \end{bmatrix}$. Altså $D_x(p(x)) = 4 + 21x^2$.

1.8 Matrixfremstilling for lineære afbildninger II

Matrixfremstilling for lineære afbildninger II

- Vi så i Sætning 6.6 at for en given lineær afbildning f og givne baser a og c gælder $K_c(f(v)) = {}_cF_aK_a(v)$ for alle $v \in V$.
- Omvendt gælder: Hvis der til $f : V \to W$ findes en matrix F, så $K_c(f(v)) = FK_a(v)$ for alle $v \in V$, så er f lineær og $F = {}_cF_a$.
- Linearitet: Af $K_cf(v) = FK_a(v)$ følger $f(v) = K_c^{-1}FK_a(v)$. Men højresiden er lineær i v.
- Videre fås $FK_a(v) = {}_cF_aK_a(v)$ for alle $v \in V$. Heraf følger $F = {}_cF_a$.
- Sætning 6.9. $\nu(f) = \nu({}_cF_a)$ og $\rho(f) = \rho({}_cF_a)$.
- Da $\nu({}_cF_a) + \rho({}_cF_a) = n = \dim V$ er dimensionssætningen $\dim V = \nu(f) + \rho(f)$ bevist.

1.9 Eksempel 2 på afbildningsmatrix I

Eksempel 2 på afbildningsmatrix I

- En lineær afbildning f fra V med basen a_1, a_2, a_3 til W med basen b_1, b_2 opfylder

$$\begin{aligned} f(a_1 + a_2 + 3a_3) &= 5b_1 - b_2,\ f(a_1 - a_2) = 3b_1 + b_2 \text{ og} \\ f(a_1 + a_3) &= -b_1 + 2b_2 \end{aligned}$$

- Vi bestemmer afbildningsmatricen ${}_bF_a$for f.
- Med $v_1 = a_1 + a_2 + 3a_3, v_2 = a_1 - 2a_2$ og $v_3 = a_1 + a_3$ har vi
- Af $K_b(f(v_i)) = {}_bF_a(K_a(v_i))$ med $i = 1,2,3$ fås $\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = {}_bF_a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = {}_bF_a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = {}_bF_a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- Dvs. ${}_bF_a \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

1.10 Eksempel 2 på afbildningsmatrix II

Eksempel 2 på afbildningsmatrix II

- Da den inverse til $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ er $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ får vi derfor, at

$$\begin{aligned} {}_bF_a &= \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -11 & -14 & 10 \\ 6 & 5 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Ved hjælp af ${}_bF_a$ kan eksempelvis $f(a_1)$ nu bestemmes til $f(a_1) = -11b_1 + 6b_2$.

1.11 Eksempel 3 på afbildningsmatrix: Koordinatskiftematricen

Eksempel 3 på afbildningsmatrix: Koordinatskiftematricen

- Lad $a = a_1, a_2, \ldots, a_n$ og $c = c_1, c_2, \ldots, c_n$ begge være baser i V.
- Lad $f : V \to V$ være den identiske afbildning, dvs. $f(v) = v$ for alle $v \in V$.
- Afbildningsmatricen for f mht. de givne baser er da

$$\begin{aligned} {}_cF_a &= [K_c(f(a_1)) \quad K_c(f(a_2)) \quad \ldots \quad K_c(f(a_n))] \\ &= [K_c(a_1) \quad K_c(a_2) \quad \ldots \quad K_c(a_n)] = {}_cM_a \end{aligned}$$

- ${}_cM_a$ er *koordinatskiftematricen* i følgende forstand:
- Da $K_c(f(v)) = {}_cF_aK_a(v)$ for alle $v \in V$ fås her, at $K_c(v) = {}_cM_aK_a(v)$.
- ${}_cM_a$ er også omtalt i forelæsningsnoterne for uge 10.