Funktion af flere variable II Uge 9

Preben Alsholm

Efterår 2009

1 Funktion af flere variable

1.1 Differentiabilitet for reel funktion af én variabel

Differentiabilitet for reel funktion af én variabel

- f er *differentiabel* i x, hvis grænseværdien

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

  eksisterer. I bekræftende fald kaldes grænseværdien for differentialkvotienten, og den betegnes med $f'(x)$.

- Anderledes sagt: f er differentiabel i x med differentialkvotient a, hvis

$$f(x+h) - f(x) = ah + \varepsilon(h)|h|$$

  hvor $\varepsilon(h) \to 0$ for $h \to 0$.

- At f er differentiabel i x betyder altså, at $f(x+h)$ approksimeres godt ved $f(x) + ah$, når $|h|$ er lille.

1.2 Differentiabilitet for reel funktion af flere variable

Differentiabilitet for reel funktion af flere variable

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og lad $x \in A$ være indre. Lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.
- f er differentiabel i x hvis der findes $a \in \mathbb{R}^k$ så

$$f(x+h) - f(x) = a \cdot h + \varepsilon(h)\|h\|$$

  hvor $\varepsilon(h) \to 0$ for $h \to 0$. (Her er $a \cdot h$ skalarproduktet mellem a og h.)

- At f er differentiabel i x betyder altså, at $f(x+h)$ approksimeres godt ved $f(x) + a \cdot h$, når $\|h\|$ er lille.
- Vektoren a kaldes *gradienten* af f i x og betegnes grad $f(x)$ eller $\nabla f(x)$.
- Udtrykket $a \cdot h$ betegnes differentialet af f i x. Betegnelse $df(x,h) = h \cdot \nabla f(x)$.
- Vi har altså $\Delta f = f(x+h) - f(x) = df(x,h) + \varepsilon(h)\|h\| \simeq df(x,h)$ for små $\|h\|$.

1.3 Partiel differentiation

Partiel differentiation

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og lad $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) \in A$. Lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.
- Antag, at funktionen $g(t) = f(t, x_2, x_3, \ldots, x_k)$ er defineret i en omegn om x_1.
- Hvis g er differentiabel i x_1, siges f at have en partiel afledet i x mht. førstekoordinaten.
- Den partielle afledede $f'_{x_1}(x) = g'(x_1)$. Andre betegnelser: $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ og $D_1 f(x)$.
- Sætning 1 (p.53). Hvis $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ er differentiabel $x \in A$, så eksisterer alle k partielle afledede og $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \right)$.
- Sætning 2 (p.53). Hvis $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ har partielle afledede i en omegn af $x \in A$, og hvis disse er kontinuerte i x, så er f differentiabel i x.

1.4 Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede

Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede

- $f(x, y) = \sin(2x + 3y)$. Vi har da

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \cos(2x+3y) \cdot 2 \\ f'_y(x,y) &= \cos(2x+3y) \cdot 3 \end{aligned}$$

- De nye funktioner f'_x og f'_y har selv partielle afledede:

$$\begin{aligned} f'_{xx}(x,y) &= \left(f'_x\right)'_x(x,y) = -4\sin(2x+3y) \\ f''_{xy}(x,y) &= \left(f'_x\right)'_y(x,y) = -6\sin(2x+3y) \\ f''_{yx}(x,y) &= \left(f'_y\right)'_x(x,y) = -6\sin(2x+3y) \\ f''_{yy}(x,y) &= \left(f'_y\right)'_y(x,y) = -9\sin(2x+3y) \end{aligned}$$

1.5 Blandede afledede, Tangentplan

Blandede afledede, Tangentplan

- Mængden af funktioner med kontinuerte partielle afledede i A op til og med p'te orden betegnes med $C^p(A)$.
- Sætning (p. 67). Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ være åben. Lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ og $f \in C^2(A)$. Så gælder for alle $x \in A$ og alle i, j at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Hvis f er differentiabel i $a \in A$ kaldes grafen for det lineære udtryk $f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a)$ for tangentplanen for f i $(a, f(a))$.
- Når $k = 2$ er ligningen for tangentplanen i $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ altså

$$\begin{aligned} z &= f(a_1, a_2) + \nabla f(a_1, a_2) \cdot (x_1 - a_1, x_2 - a_2) \\ &= f(a_1, a_2) + f'_{x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2) \end{aligned}$$

1.6 Kædereglen I

Kædereglen I

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ og lad $(x, y) = (X(t), Y(t)), t \in I$, være parameterfremstilling for en kurve, der forløber i A.
- Lad $g : I \to \mathbb{R}$ være givet ved $g(t) = f(X(t), Y(t))$ for alle $t \in I$.
- Antag, at X og Y er differentiable i $t_0 \in I$ og at f er differentiabel i $(x_0, y_0) = (X(t_0), Y(t_0))$ (der antages at være et indre punkt i A).
- Så gælder: g er differentiabel i t_0 og $g'(t_0) = f'_x(x_0, y_0) X'(t_0) + f'_y(x_0, y_0) Y'(t_0)$.
- Anderledes skrevet: $g'(t_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (X'(t_0), Y'(t_0))$.
- Endnu en version: $\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dX}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dY}{dt}$ hvor det underforstås hvor de afledede skal evalueres.

1.7 Eksempler på brugen af kædereglen

Eksempel på brugen af kædereglen

- Lad $f(x, y) = (x + y^2) \ln x$ og $X(t) = \cos t, Y(t) = \sin t$.
- Lad $g(t) = f(X(t), Y(t))$ for $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- Da X og Y er differentiable overalt og f er differentiabel i $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, er g differentiabel i $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- Vi har $f'_x(x, y) = \ln x + (x + y^2)\frac{1}{x}$, $f'_y(x, y) = 2y \ln x$, $X'(t) = -\sin t$ og $Y'(t) = \cos t$.
- Så $g'(t) = f'_x(X(t), Y(t)) X'(t) + f'_y(X(t), Y(t)) Y'(t) = \left(\ln X(t) + \left(X(t) + Y(t)^2\right)\frac{1}{X(t)}\right) X'(t) + 2Y(t) \ln X(t) \cdot Y'(t) = -\left(\ln \cos t + \left(\cos t + \sin^2 t\right)\frac{1}{\cos t}\right) \sin t + 2 \sin t \cos t \ln \cos t$
- Flere eksempler i Maple-worksheet.

1.8 Bevis for kædereglen I

Bevis for kædereglen I

- f er differentiabel i (x_0, y_0) så der findes en funktion ε defineret i en cirkelskive K omkring $(0,0)$ og med $\varepsilon(h_1, h_2) \to 0$ for $h = (h_1, h_2) \to (0,0)$ så for $h \in K$:

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot h + \varepsilon(h) \|h\|$$

- Med $h = (X(t_0 + \Delta t) - X(t_0), Y(t_0 + \Delta t) - Y(t_0))$ fås nu $g(t_0 + \Delta t) - g(t_0) = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot h + \varepsilon(h) \|h\|$.
- Heraf følger

$$\frac{g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)}{\Delta t} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \frac{h}{\Delta t} + \varepsilon(h) \left\| \frac{h}{\Delta t} \right\| \frac{|\Delta t|}{\Delta t}$$

- Men $\frac{h}{\Delta t} = \frac{(X(t_0+\Delta t) - X(t_0), Y(t_0+\Delta t) - Y(t_0))}{\Delta t} \to (X'(t_0), Y'(t_0))$ for $\Delta t \to 0$.
- Da $\varepsilon(h) = \varepsilon(X(t_0 + \Delta t) - X(t_0), Y(t_0 + \Delta t) - Y(t_0)) \to 0$ for $\Delta t \to 0$, fås, at $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t_0+\Delta t) - g(t_0)}{\Delta t} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (X'(t_0), Y'(t_0))$.

1.9 Kædereglen II

Kædereglen II

- Betragt som ovenfor $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.
- Lad nu $(u, v) \mapsto (X(u, v), Y(u, v))$ være en afbildning af $B \subseteq \mathbb{R}^2$ over i A.
- Lad $g : B \to \mathbb{R}$ være givet ved $g(u, v) = f(X(u, v), Y(u, v))$ for alle $(u, v) \in B$.
- Antag, at X og Y har partielle afledede mht. u i $(u_0, v_0) \in B$ og at f er differentiabel i $(x_0, y_0) = (X(u_0, v_0), Y(u_0, v_0))$ (der antages at være et indre punkt i A).
- Så gælder: g har en partiel afledet mht. u i (u_0, v_0) og $g'_u(u_0, v_0) = f'_x(x_0, y_0) X'_u(u_0, v_0) + f'_y(x_0, y_0) Y'_u(u_0, v_0)$.
- Anderledes skrevet: $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial u}$.
- En tilsvarende sætning gælder om $\frac{\partial g}{\partial v}$.
- Bevis: Kæderegel II følger umiddelbart af Kæderegel I.

1.10 Retningsafledet I

Retningsafledet I

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ og lad e være en enhedsvektor i $\mathbb{R}^2$.
- Vi vil undersøge stigningstakten for f i det indre punkt $x \in A$ i retningen e.
- Derfor betragter vi $F(t) = f(x + te)$ for små værdier af t.
- Antag, at f er differentiabel i x. Så er F differentiabel for alle (små) værdier af t og $F'(t) = \nabla f(x + te) \cdot e$.
- Stigningstakten for f i x i retningen e er nu $F'(0) = \nabla f(x) \cdot e$.
- Størrelsen $\nabla f(x) \cdot e$ kaldes den retningsafledede og betegnes med $f'(x; e)$, altså
$$f'(x; e) = \nabla f(x) \cdot e$$
- Bemærk, at den retningsafledede i x_1-aksens retning blot er den partielle afledede $f'_{x_1}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$.

1.11 Retningsafledet II

Retningsafledet II

- Af $f'(x; e) = \nabla f(x) \cdot e$ ses, at $-\|\nabla f(x)\| \le f'(x; e) \le \|\nabla f(x)\|$ for alle enhedsvektorer e.
- Værdien $\|\nabla f(x)\|$ antages når e peger i gradientens retning, altså for $e = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$.
- Værdien $-\|\nabla f(x)\|$ antages tilsvarende for $e = \frac{-\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$.
- Hvis e er vinkelret på $\nabla f(x)$ er den retningsafledede 0.
- Eksempel: Den retningsafledede for $f(x, y) = (x + y^2) \ln x$ i punktet $(1, 3)$ i retningen $e = (e_1, e_2)$ er
$$f'((1, 3); e) = \nabla f(1, 3) \cdot e$$
- Idet vi har $f'_x(x, y) = \ln x + (x + y^2) \frac{1}{x} = 10$, $f'_y(x, y) = 2y \ln x = 0$ i $(x, y) = (1, 3)$ fås
- $f'((1, 3); e) = (10, 0) \cdot (e_1, e_2) = 10e_1$.
- Hvis $e = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ fås altså $f'((1, 3); e) = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6$.

1.12 Gradient og niveaukurve

Gradient og niveaukurve

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og lad $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ være differentiabel i det indre punkt $(x_0, y_0) \in A$.
- Antag, at $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.
- Niveaukurven for f gennem (x_0, y_0) er givet ved ligningen $f(x, y) = f(x_0, y_0)$. Med $k = f(x_0, y_0)$ altså $f(x, y) = k$.
- Antag, at $(X(t), Y(t))$, $t \in I$, er en parameterfremstilling for $f(x, y) = k$ med $(X(t_0), Y(t_0)) = (x_0, y_0)$ og at X og Y er differentiable i t_0 med $(X'(t_0), Y'(t_0)) \neq (0, 0)$.
- Så gælder $f(X(t), Y(t)) = k$ for alle $t \in I$, og dermed $\frac{d}{dt} f(X(t), Y(t)) = 0$ for alle $t \in I$.
- Kædereglen giver så $0 = \frac{d}{dt} f(X(t), Y(t))\Big|_{t=t_0} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (X'(t_0), Y'(t_0))$.
- Dvs. at tangentvektoren $(X'(t_0), Y'(t_0))$ til niveaukurven er vinkelret på gradienten.
- Se illustration i Maple-worksheet.