DesignMat Uge 10
Taylorudvikling for funktion af flere variable

Preben Alsholm

Efterår 2009

1 Taylorpolynomier for funktion af flere variable

1.1 Taylorpolynomium for funktion af én variabel

Taylorpolynomium for funktion af én variabel

- Lad f være n gange differentiabel i intervallet I og lad $x_0 \in I$. Polynomiet

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \end{aligned}$$

  kaldes det n'te Taylorpolynomium for f med udviklingspunkt x_0.

- Når $x_0 = 0$ kaldes polynomiet ofte et MacLaurin-polynomium.
- Taylors formel: Lad f være $n+1$ gange differentiabel i intervallet I og lad $x_0 \in I$. For givet $x \in I$ findes et tal ξ mellem x_0 og x, så $f(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$.

1.2 Differentialoperatoren $D_h = h \cdot \nabla$ I

En differentialoperator I

- Vi indfører differentialoperatoren D_h ved

$$D_h = h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + h_q \frac{\partial}{\partial x_q}$$

  når $h = (h_1, h_2, \ldots .h_q)$ er en fast vektor, der ikke afhænger af $x_1, x_2, \ldots, x_q$.

- D_h opererer på funktioner af q variable på følgende måde

$$D_h f = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + h_q \frac{\partial f}{\partial x_q} = h \cdot \nabla f$$

- Derfor skrives også $D_h = h \cdot \nabla$.
- Eksempel. Hvis $q = 2$ og $h = (3, -2)$, er $D_h = 3\frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\partial}{\partial y}$, så

$$D_h\left(x^3 + xy^2\right) = 3\left(3x^2 + y^2\right) - 2\,(2xy) = 9x^2 + 3y^2 - 4xy$$

1.3 Differentialoperatoren $D_h = h \cdot \nabla$ II

En differentialoperator II

- Videre fås $D_h^2\left(x^3 + xy^2\right) = D_h\left(D_h\left(x^3 + xy^2\right)\right) = D_h\left(9x^2 + 3y^2 - 4xy\right) = 3\,(18x - 4y) - 2\,(6y - 4x) = 62x - 24y$.
- Dette resultat kan også opnås ved først at udregne D_h^2:

$$D_h^2 = \left(3\frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = 9\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 12\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

- hvorefter vi udnytter, at $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^3 + xy^2\right) = 6x$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(x^3 + xy^2\right) = 2y$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x^3 + xy^2\right) = 2x$.
- Altså $D_h^2\left(x^3 + xy^2\right) = 9 \cdot 6x - 12 \cdot 2y + 4 \cdot 2x = 62x - 24y$.
- Når $q = 2$ kan D_h^n findes ved hjælp af binomialformlen

$$D_h^n = \left(h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} h_1^k h_2^{n-k}\frac{\partial^n}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$$

1.4 Taylors sætning i flere variable

Taylors sætning i flere variable

- Lad $f \in C^{n+1}(A)$ hvor $A \subset \mathbb{R}^q$ er åben. Lad $a \in A$ og lad $h \in \mathbb{R}^q$ være så lille, at punkterne $a + th, t \in [0, 1]$, alle ligger i A. Med $x = a + h$ gælder, at $f(x) = f(a) + D_h f(a) + \frac{1}{2}D_h^2 f(a) + \frac{1}{3!}D_h^3 f(a) + \cdots + \frac{1}{n!}D_h^n f(a) + R_n(x)$.
- hvor $D_h = h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + h_q\frac{\partial}{\partial x_q} = h \cdot \nabla$ og hvor restleddet er givet ved

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\left(D_h^{n+1} f\right)(a + \xi h)$$

  med $\xi \in]0, 1[$.
- Det n'te Taylorpolynomium for f med udviklingspunkt a er

$$P_n(x) = f(a) + D_h f(a) + \frac{1}{2}D_h^2 f(a) + \frac{1}{3!}D_h^3 f(a) + \cdots + \frac{1}{n!}D_h^n f(a)$$

- P_n er karakteriseret ved, at det har de samme partielle afledede som f i a op til og med n'te orden.

1.5 Taylors sætning i 2 variable og til 2. orden

Taylors sætning i 2 variable og til 2. orden

- Lad $f \in C^3(A)$ hvor $A \subset \mathbb{R}^2$ er åben. Lad $a = (a_1, a_2) \in A$ og lad $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ være så lille, at punkterne $a + th, t \in [0,1]$, alle ligger i A. Med $x = a + h$ gælder, at

$$f(x) = f(a) + D_h f(a) + \frac{1}{2} D_h^2 f(a) + \frac{1}{3!} \left(D_h^3 f \right) (a + \xi h)$$

- hvor $D_h = h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} = h \cdot \nabla$ og $\xi \in]0,1[$.
- Det 2. Taylorpolynomium for f er $P_2(x_1, x_2) =$ $f(a) + f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a)(x_2 - a_2) +$ $\frac{1}{2}(f''_{x_1 x_1}(a)(x_1 - a_1)^2 + 2 f''_{x_1 x_2}(a)(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)$ $+ f''_{x_2 x_2}(a)(x_2 - a_2)^2)$

1.6 Bevis for Taylors sætning i flere variable

Bevis for Taylors sætning i flere variable

- Lad $g(t) = f(a + th)$. Så vil g opfylde $g \in C^{n+1}(I)$ i er åbent interval $I \supset [0,1]$.
- Vi bruger Taylors formel for funktion af én variabel på g med udviklingspunkt 0.
- Kædereglen giver $g'(t) = f_{x_1}(a + th) h_1 + f_{x_2}(a + th) h_2 + \cdots + f_{x_q}(a + th) h_q = (D_h f)(a + th)$.
- Videre fås $g''(t) = \frac{d}{dt}((D_h f)(a + th)) = [D_h(D_h f)](a + th) = \left(D_h^2 f\right)(a + th)$, idet resultatet fra før nu bruges på $D_h f$ i stedet for på f.
- Generelt: $g^{(k)}(t) = \left(D_h^k f\right)(a + th)$.
- Taylor: $g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(0) + \frac{1}{3!} g'''(0) + \cdots + \frac{1}{n!} g^{(n)}(0) + R_n$.
- hvor $R_n = \frac{1}{(n+1)!} g^{(n+1)}(\xi)$ og $\xi \in]0,1[$. Hermed følger sætningen umiddelbart.

1.7 Eksempel 1

Eksempel 1

- Lad f være givet ved $f(x, y) = \sin(x + 3y) e^{-x^2}$. Vi finder det 2. Taylorpolynomium udfra $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

- Vi har

$$\begin{aligned}
f'_x(x,y) &= e^{-x^2}\left(\cos(x+3y) - 2x\sin(x+3y)\right)\\
f'_y(x,y) &= 3e^{-x^2}\cos(x+3y)\\
f''_{xx}(x,y) &= e^{-x^2}\left(\left(4x^2-3\right)\sin(x+3y) - 4x\cos(x+3y)\right)\\
f''_{xy}(x,y) &= -3e^{-x^2}\left(\sin(x+3y) + 2x\cos(x+3y)\right)\\
f''_{yy}(x,y) &= -9e^{-x^2}\sin(x+3y)
\end{aligned}$$

- Så $f'_x\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = 0, f'_y\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = 0, f''_{xx}\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = 3, f''_{xy}\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = 3, f''_{yy}\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = 9$

- Altså har vi, idet også $f\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = -1$, at

$$\begin{aligned}
P_2(x,y) &= -1 + \frac{1}{2}\left(3x^2 + 2\cdot 3x\left(y-\frac{\pi}{2}\right) + 9\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2\right)\\
&= -1 + \frac{3}{2}x^2 + 3x\left(y-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{9}{2}\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

1.8 Eksempel 2: En differentialligning I

Eksempel 2: En differentialligning I

- Betragt differentialligningen $x'(t) = \sin(x(t)) + at$ med begyndelsesbetingelsen $x(0) = b$.
- Løsningen $x(t)$ vil foruden af t også afhænge af a og b. Lad os derfor skrive $x(t) = f(a,b,t)$.
- Forsøg på at løse differentialligningen vil mislykkes.
- Numerisk løsning er udelukket, når konstanterne a og b ikke er konkrete tal.
- Vi vil undersøge løsningen for små værdier af $|a-1|, |b|$ og $|t|$.
- Vi finder Taylorpolynomiet $P_2(a,b,t)$ for f af orden 2 og med udviklingspunkt $(1,0,0)$.
- Vi har $P_2(a,b,t) = f(1,0,0) + f'_a(1,0,0)(a-1) + f'_b(1,0,0)\,b + f'_t(1,0,0)\,t + \frac{1}{2}\left(f''_{aa}(1,0,0)(a-1)^2 + f''_{bb}(1,0,0)\,b^2 + f''_{tt}(1,0,0)\,t^2\right) + f''_{ab}(1,0,0)(a-1)\,b + f''_{at}(1,0,0)(a-1)\,t + f''_{bt}(1,0,0)\,bt$

1.9 Eksempel 2: En differentialligning II

Eksempel 2: En differentialligning II

- Med udeladelse af argumenterne $(1,0,0)$ har vi
- $P_2(a,b,t) = f + f'_a\cdot(a-1) + f'_b\cdot b + f'_t\cdot t + \frac{1}{2}\left(f''_{aa}\cdot(a-1)^2 + f''_{bb}\cdot b^2 + f''_{tt}\cdot t^2\right) + f''_{ab}\cdot(a-1)\,b + f''_{at}\cdot(a-1)\,t + f''_{bt}\cdot bt$

- Vi skal nu bestemme $f, f'_a, f'_b, f'_t, f''_{aa}, f''_{bb}, f''_{tt}, f''_{ab}, f''_{at}, f''_{bt}$ i punktet $(a, b, t) = (1, 0, 0)$.
- Begyndelsesbetingelsen $x(0) = b$ kan skrives $f(a, b, 0) = b$.
- Heraf følger, at $f'_b(1, 0, 0) = 1$ og at $f, f'_a, f''_{aa}, f''_{bb}, f''_{ab}$ alle er 0 i $(1, 0, 0)$.
- Hermed: $P_2(a, b, t) = b + f'_t \cdot t + \frac{1}{2} f''_{tt} \cdot t^2 + f''_{at} \cdot (a - 1)\, t + f''_{bt} \cdot bt$.
- De afledede $f'_t, f''_{tt}, f''_{at}, f''_{bt}$ må bestemmes ud fra differentialligningen $f'_t(a, b, t) = \sin(f(a, b, t)) + at$.

1.10 Eksempel 2: En differentialligning III

Eksempel 2: En differentialligning III

- Indsættelse i differentialligningen

$$f'_t(a, b, t) = \sin(f(a, b, t)) + at \tag{1}$$

- giver $f_t(1, 0, 0) = \sin(f(1, 0, 0)) = \sin 0 = 0$.
- Differentiation af (1) mht. t giver $f''_{tt}(a, b, t) = \cos(f(a, b, t))\, f'_t(a, b, t) + a$, så $f''_{tt}(1, 0, 0) = \cos 0 \cdot 0 + 1 = 1$.
- Differentiation af (1) mht. a giver $f''_{ta}(a, b, t) = \cos(f(a, b, t))\, f'_a(a, b, t) + t$, så $f''_{ta}(1, 0, 0) = \cos 0 \cdot 0 + 0 = 0$.
- Differentiation af (1) mht. b giver $f''_{tb}(a, b, t) = \cos(f(a, b, t))\, f'_b(a, b, t)$, så $f''_{tb}(1, 0, 0) = \cos 0 \cdot 1 = 1$.
- Hermed har vi $P_2(a, b, t) = b + \frac{1}{2} t^2 + bt$.