Største- og mindsteværdi Uge 11

Preben Alsholm

Efterår 2009

1 Største- og mindsteværdi

1.1 Ekstremum for funktion af to variable: Definitioner

Ekstremum for funktion af flere variable: Definitioner

- Lad $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og $f : A \to \mathbb{R}$ en reel funktion af n variable.
- Punktet $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$ kaldes et *egentligt lokalt minimumspunkt* for f, hvis $f(x) > f(a)$ for alle x i en omegn omkring a og med $x \neq a$.
- Analogt defineres *egentligt lokalt maksimumspunkt*. Fællesbetegnelse: *ekstremumspunkt*.
- Punktet a kaldes et *globalt minimumspunkt* for f, hvis $f(x) \geq f(a)$ for alle $x \in A$.
- Analogt defineres *globalt maksimumspunkt*.
- *Mindsteværdien* for f er værdien af f i et globalt minimumspunkt. *Størsteværdien* er værdien af f i et globalt maksimumspunkt.

1.2 Ekstremum for funktion af flere variable

Ekstremum for funktion af flere variable: Sætninger

- En kontinuert funktion antager på en lukket og begrænset mængde en største- og en mindsteværdi.
- Hvis f er differentiabel i det indre punkt a og hvis f har lokalt ekstremum i a, så gælder, at $\nabla f(a) = (0, 0, \dots, 0)$, dvs. a er et stationært punkt.
- Ekstremumspunkterne for f på mængden A (hvis der er nogen) findes blandt

  1. Stationære punkter for f.
  2. Punkter hvor f ikke har partielle afledede.
  3. Randpunkterne for A.

1.3 Randundersøgelse, Eksempel 1 og 2

Randundersøgelse, Eksempel 1 og 2

- I de to eksempler er der tale om en kontinuert funktion f på en lukket og begrænset mængde A.
- Vi ved derfor, at største- og mindsteværdi for f på A eksisterer.
- Vi skal "blot" finde disse værdier.
- Lad $f(x,y) = 2x^2y^2 - 2x^2 - y^4$. Vi finder største- og mindsteværdi på cirkelskiven $x^2 + y^2 \leq 9$ og på cirkelskiven $x^2 + y^2 \leq 1$.
- Hele undersøgelsen præsenteres i Maple-worksheet til denne uge.
- Lad $f(x,y) = (2x + y)\, e^{-xy}$. Vi finder største- og mindsteværdi på området givet ved ulighederne $y + 2x \leq 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$.
- Hele undersøgelsen præsenteres i Maple-worksheet til denne uge.

1.4 Randundersøgelse, Eksempel 1 (men på åben cirkelskive)

Randundersøgelse, Eksempel 1 (men på åben cirkelskive)

- Lad f være kontinuert og lad A være en *ikke* lukket, men dog begrænset mængde.
- *Hvis* f kan udvides til en kontinuert funktion på $\overline{A}$, så har f på $\overline{A}$ en største- og en mindsteværdi.
- Hvis størsteværdien *kun* antages på den del af randen, som ikke tilhører A, så har f ingen størsteværdi.
- Lad $f(x,y) = 2x^2y^2 - 2x^2 - y^4$. Både største- og mindsteværdi på cirkelskiven $x^2 + y^2 \leq 9$ antages kun på randen. Derfor har f hverken størsteeller mindsteværdi på den åbne cirkelskive $x^2 + y^2 < 9$. Værdimængden er $\left]-81, \frac{46}{3}\right[$.
- På cirkelskiven $x^2 + y^2 \leq 1$ antages størsteværdien i $(0,0)$, mens mindsteværdien antages på randen. Derfor har f ingen mindsteværdi på den åbne cirkelskive $x^2 + y^2 < 1$, men har en størsteværdi, nemlig $f(0,0) = 0$. Værdimængden er $]-2, 0]$.

1.5 Randundersøgelse, Eksempel 3 og 4

Randundersøgelse, Eksempel 3 og 4

- Lad f være kontinuert og lad A være en *ikke* lukket, men dog begrænset mængde.
- Hvis f ikke er opadtil begrænset på A, dvs. ikke opfylder nogen ulighed af formen $f(x,y) \leq C$ for alle $(x,y) \in A$, så har f ingen størsteværdi på A.

- Lad $f(x,y) = \frac{1}{1-(x^2+y^2)}$ for $x^2+y^2 < 1$. f er ikke opadtil begrænset på cirkelskiven $x^2+y^2 < 1$, så har ingen størsteværdi, men har mindsteværdien 1. Værdimængden er $[0,\infty[$.

- Betragt $f(x) = (1-x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ på intervallet $]0,1]$. f er kontinuert og begrænset, men har hverken største eller mindsteværdi. f kan ikke udvides til en kontinuert funktion på $[0,1]$, da $\lim_{x\to 0} f(x)$ ikke eksisterer. Værdimængden er $]-1,1[$.

1.6 Randundersøgelse, Eksempel 5

Randundersøgelse, Eksempel 5

- Lad $f(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2-6z$.
- Bestem største- og mindsteværdi for f på kuglen $x^2+y^2+z^2 \leq 4$.
- Ét stationært punkt: $(0,0,1)$. Værdi $f(0,0,1) = -3$.
- Randen af kuglen er kugleoverfladen givet ved $x^2 = 4-\left(y^2+z^2\right)$.
- På denne er $f(x,y,z) = g(y,z) = 4+y^2+2z^2-6z$.
- Bestemmer største- og mindsteværdi for g på cirkelskiven $y^2+z^2 \leq 4$.
- Stationært punkt for g er $\left(0,\frac{3}{2}\right)$. Værdi $g\left(0,\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.
- Randen af cirkelskiven er cirklen givet ved $y^2 = 4-z^2$.
- På cirklen er $g(y,z) = h(z) = z^2-6z+8 = (z-2)(z-4)$.
- Største- og mindsteværdi for h på $[-2,2]$ er $h(-2) = 24$ og $h(2) = 0$.
- Konklusion: Størsteværdi for f er $f(0,0,-2) = h(-2) = 24$ og mindsteværdi er $f(0,0,1) = -3$.